Cr$ BRASIL
500
CORREIOS

Cr$ BRASIL
500
CORREIOS

D.R. - S.P.

Prof. Mário Schenberg
Instituto de Física da USP
Caixa Postal 20.516
São Paulo, SP

RPC

Remetente A. Carlos Motta
Endereço Rua Jules Martin, 130
CEP 03183 - S. Paulo, SP.

Trabalho abaixo, segue para a
Revista Il Nuovo Cimento.

São Paulo, 24 de Fevereiro de 1986

Caro Prof. Mário Schenberg.

Estou enviando ao Sr. uma sinopse de um artigo que estou dando redação final para enviar ao Il Nuovo Cimento B.

Ramificando Maximalmente um Black Hole com distorção mínima

Abstract

As equações são derivadas, as quais determinam as hipersuperfícies maximais do espaço-tempo de Kerr-Newman extendido analiticamente. Uma solução analítica é obtida na mudança, caso não-rotante para hipersuperfícies maximais plana asintoticamente do espaço-tempo de Reissner-Nordström usando coordenadas espaciais que miniminiza a coordenada de distorção. Os ramos tendem asintoticamente no tempo para uma hipersuperfície limitante fazendo entre os horizontes interno e externo, enquanto cobre o domínio de comunicação externa do black hole. As linhas de coordenadas estão desenhadas abaixo o black hole se coordenada de simetria é mantida interceptando o "túnel". A equação para hipersuperfícies limitantes na geometria de Kerr é resolvida numericamente

Uma solução única aparentemente existe para todo black hole que tem rotação com momento angular específico $|a| < M$, onde M é a massa do black hole. Uma excelente aproximação analítica é derivada para os valores da coordenada r de Boyer-Lindquist sobre a hipersuperfície.

Existe muito interesse em espaço-tempo gerado, particularmente este que descreve colapso gravitacional não-esférico

Uma promissora escolha da coordenada de tempo na usual decomposição 3 + 1 das equações de Einstein corresponde por escolhendo cada hipersuperfície para ser maximal. A condição acima requer que o 3-volume de cada hipersuperfície para ser um máximo dentro uma fronteira dada. Estabrook e Reinhart primeiro mostrou que ramificando maximalmente um black hole de Schwarzschild de massa M resultou em uma seqüência de hipersuperfície que "wrapped around" a hipersuperfície limitante de raio $R_{lim} = 3M/2$, portanto esquivando a singularidade em $r = 0$ enquanto cobrindo a região exterior $r > 2M$. Hipersuperfícies maximais também tem tocado em uma parte chave nos tratamentos analíticos da estrutura global da relatividade geral e o problema da colisão de black holes.

No contexto cosmológico, ramos de curvatura principal constante ($tr K = cte$) tem sido usado no espaço-tempo de Schwarzschild e em 1+1 integrações numérica.

Em outras investigações as ramificações maximais do espaço-tempo de Kerr-Newman, que por vários "no-hair" teoremas é acreditado para ser a solução genérica para um black hole de massa M, momento angular específico a, e carga Q. Se a censura cósmica é definida, o estado final de qualquer colapso gravitacional é preferível para ser a geometria de Kerr-Newman. Então a determinação das hipersuperfícies maximais do espaço-tempo provam por experimento de computador estudando colapso gravitacional.

As equações para as hipersuperfícies maximais da geometria de Kerr-Newman são derivadas para um princípio variacional. Uma solução analítica é descoberta para o caso $a^2 = 0$, correspondendo para uma mudança, black hole sem rotação. É mostrado que os ramos tendem assintoticamente no tempo para uma hipersuperfície limitante, portanto esquivando o horizonte de Cauchy em $r = r_-$. Uma transformação para as coordenadas espaciais de distorção mínima mostrou que as linhas de coordenadas são rapidamente desenhadas abaixo o black hole se a coordenada de simetria é mantida interceptada o túnel

As equações.

Na usual decomposição 3+1 das equações de Einstein, a evolução numérica ou analítica de 3-geometria para uma hipersuperfície requere uma escolha de coordenadas de tempo e espaço. Estas coordenadas são determinadas pela seleção sobre cada hipersuperfície de função lapso α e o vetor alterado β^i. A 4-métrica é dada por

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i\beta^i)(dx^0)^2 + 2\beta_i dx^i dx^0 + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (1)$$

e a curvatura extrínseca dada por

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\alpha^{-1}(\gamma_{ij,0} - \beta_{i|j} - \beta_{j|i}), \quad (2)$$

onde a barra denota diferenciação covariante com respeito à 3-métrica. E tem sido mostrado que a usual escolha a pelo significado da condição de ramificação maximal ($K^i_i = 0$). Esta escolha frequentemente atrasa a evolução em regiões de alta curvatura e usualmente (mas nem sempre) esquiva singularidade. Tem também sido sugerido que estudos de radiação gravitacional deve ser facilitado por escolhendo β^i para minimizar a coordenada interceptado na 3-geometria conformal.

Em coordenadas de Boyer-Lindquist, a métrica de Kerr-Newman para um black hole de massa M, carga Q, e momento angular específico $\underline{a}$ é

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0\phi}\,dt\,d\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad (3)$$

onde

$$g_{00} = -(\Delta - a^2 \operatorname{sen}^2\theta/\rho^2 \quad (4)$$

$$g_{0\phi} = a(Q^2 - 2Mr)\operatorname{sen}^2\theta/\rho^2 \quad (5)$$

$$g_{\phi\phi} = [(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \operatorname{sen}^2\theta]\operatorname{sen}^2\theta/\rho^2 \quad (6)$$

$$g_{rr} = \rho^2/\Delta \quad (7)$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2 \quad (8)$$

e

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (9)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta. \quad (10)$$

Uma dada hipersuperfície axisimétrica deste espaço-tempo deve usualmente ser olhado como especificando t como uma função de r e θ. Sobre tal uma hipersuperfície,

$$dt = t_{,r}dr + t_{,\theta}d\theta \quad (11)$$

e a 3-métrica sobre hipersuperfície é

$$ds_3^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j$$
$$= (\rho^2/\Delta - g_{00}t_{,r}^2)dr^2 - 2g_{00}t_{,r}t\,dr\,d\theta$$
$$+ (\rho^2 - g_{00}t_{,\theta}^2)d\theta^2 + 2g_{0\phi}t_{,\theta}d\theta d\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 \quad (12)$$

O 3-volume da hipersuperfície é

$$V_3 = \iiint \gamma^{1/2}\,dr\,d\theta\,d\phi \quad (13)$$

onde $\gamma \equiv \det \gamma_{ij}$

$$= \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\,[(r^2+a^2)^2/\Delta - a^2\operatorname{sen}^2\theta - \Delta t_{,r}^2 - t_{,\theta}^2] \quad (14)$$

A hipersuperfície é maximal dentro uma dada limitação se $\delta V_3 = 0$. Desde que γ não tem dependência explícita de t, a equação de Euler-Langrage para uma hipersuperfície maximal reduz para

$$D(\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\Delta t_{,r}\gamma^{-1/2})/Dr + D(\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, t_{,\theta}\gamma^{-1/2})/D\theta = 0 \quad (15)$$

$$DY/DX \equiv \partial Y/\partial X + (\partial t/\partial X)(\partial Y/\partial t) + \partial^2 t/\partial X^2)(\partial Y/\partial t_{,X}) \quad (16)$$

Ramificando o espaço-tempo de Reissner-Nordström

A métrica de Reissner-Nordström descreve uma mudança em black hole sem rotação e deve ser obtido por colando $a^2 = 0$ nas eqs (3) e (10). Quando $|Q| < M$, existem dois eventos de horizontes, entre o qual r é uma coordenada do tipo-tempo. Estes horizontes jazem em

$$r_\pm = M \pm (M^2 - Q^2)^{1/2} \quad (17)$$

A Geometria descreve a evolução de uma ponte de Einstein-Rosen e pode ser representado por um diagrama conformal. O túnel da ponte jaz sobre o eixo de simetria, $\xi=0$, em tal diagrama. Quando o túnel está em seu raio máximo r_+, a ponte conecta duas hipersuperfície tipo espaço plana assintotica-mente. O túnel contrai para um raio mínimo r_-, salta, e reexpande para raio r_+. No processo as regiões exteriores da ponte são primeiro reconectada para singularidade $r=0$ e então para dois novos universo assintoticamente plano; o ciclo repete-se ao infinito.

A eq. para uma hipersuperfície maximal simétrica esfericamente do espaço-Tempo de Reissner-Nordström é facilmente obtido da eq (15). Desde que $t=t(r)$, independente de θ. A eq (15) torna-se

$$D\left[r^2\Delta t_{,r}\left(r^6\Delta^{-1}-r^2\Delta t_{,r}^2\right)^{-1/2}\right]/Dr=0$$

A eq (18) é obviamente satisfeita se a expressão dentro do colchete quadrado é uma cte (em qualquer dada hipersuperfície) denotada por $T(\bar{t})$, onde $\bar{t}$ é a coordenada de tempo maximal. Então a solução para $t_{,r}$ é

$$t_{,r}=-T(\bar{t})r^2\Delta^{-1}\left(r^2\Delta+T^2\right)^{-1/2} \qquad (19)$$

onde $T(\bar{t})$ é uma função somente de $\bar{t}$ e T é para ser determinado pela condição de limitação sobre o túnel e na infinidade espacial. A escolha $T(\bar{t})=0$ corresponde para a hipersuperfície $t=$ cte da métrica da eq (3), para a qual $\alpha\to 0$ como $r\to r_+$. Estes ramos não faz penetrar o horizonte de evento assim eles não podem ser usados para mostrar a evolução dinâmica da região $r_-<r<r_+$. Na região $r_-<r<r_+$ existe simetria sobre o túnel em $t=0$. Como uma condição de

Como uma limitação é consequentemente natural para pensar-se que os ramos maximais para ser simétricos cruzar o túnel. A solução da eq (18) é então

$$r(r,\bar{t}) = -T(\bar{t}) = \int_{R(\bar{t})}^{r} \Delta^{-1}(r^2\Delta + T^2)^{1/2}\, dr \quad (20)$$

O menor limite, $R(\bar{t})$, deve ser o raio do túnel para t para desaparecer em $r = R(\bar{t})$. No túnel, $t=0$, os ramos devem ser normais para o eixo r assim que $R(\bar{t})$ deve ser o maior das duas raízes da quadrática

$$r^2\Delta + T^2 = r^4 - 2Mr^3 + Q^2r^2 + T^2 \quad (21)$$

T é dado implicitamente como uma função de $\bar{t}$ por requerendo que $t \to \bar{t}$ como $r \to \infty$

$$\bar{t} = -T(\bar{t}) \int_{R(\bar{t})}^{\infty} r^2\Delta^{-1}(r^2\Delta + T^2)^{-1/2}\, dr \quad (22)$$

A 2ª família de hipersuperfícies podem ser descobertas por colocando

$$t = -T(\bar{t}) \int_{r}^{S(\bar{t})} r^2\Delta^{-1}(r^2\Delta + T^2)^{-1/2}\, dr \quad (23)$$

onde $S(\bar{t})$ é o menor das raízes reais de eq 21. A hipersuperfície inicial é a 3-geometria no momento de simetria de tempo quando o túnel está no raio r_-. Estas hipersuperfícies sempre interceptam a singularidade $r=0$ e nunca passado extendido $r = r_+$. Para cada valor de $\bar{t}$ a hipersuperfície maximal descrita por $t = t(r,\bar{t})$ na eqs (20) e (22) pode ser representado sobre parte de um diagrama conformal da geometria de Reissner-Nordström. Porque da simetria de reflexão cruza o túnel.

A integral para $\bar{t}$ [eqs (22)] diverge (i.e. $\bar{t} \to \infty$) quando as duas raízes da quadrática (21) coincide. Esta divergência ocorre para

$$T = 2^{1/2}\{[27M^4 - 6M^2Q^2 + 8Q^4 + M(9M^2 - 8Q^2)^{3/2}]^{1/2}\}/8 \quad (24)$$

e, para este valor limitante de T,
$R(\bar{t}) = R_{lim} = [3M + (9M^2 - 8Q^2)^{1/2}]/4$
Desde que $Q^2 < M^2$, é visto que $r_- < R_{lim} < r_+$, e é verificado que $r = R_{lim}$ é de fato uma hipersuperfície maximal

Agora considerems uma transformação para introduzir distorção minimal sobre cada hipersuperfície. A 3-metrica sobre as hipersuperfícies maximais é dado por

$$ds_3^2 = (1 - 2M/r + Q^2/r^2 + T^2/r^4)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\phi^2)$$

Então γ_{rr} diverge como $r \to R(\bar{t})$ enquanto γ_{00} permanece finito

Algumas Conclusões

(1) As equações determinando as hipersuperfícies maximais do espaço-tempo Kerr-Newman extendido analiticamente têm sido derivadas para um princípio variacional.

(2) Uma solução analítica para as equações tem sido descoberta para ramificações maximal de um black hole não-rotante com carga. É descoberto que os ramos tendem asintoticamente no tempo acima uma hipersuperfície limitante

$$r = R_{lim} = 3M[1 + (1 - 8Q^2/9M^2)^{1/2}]/4$$

no processo cobrindo o exterior do black-hole e esquivando o horizonte de Cauchy em $r = r_-$. As transformações de coordenadas sobre hipersuperfície maximais introduz coordenadas espacial plana conformal, que minimiza a coordenada distorção. Descobriu-se que as linhas de coordenadas são desenhadas abaixo o black hole mais rapidamente que partículas testes realizadas em repouso em $t = 0$.

Isto deve ser uma desvantagem em estudo numérico de colapso gravitacional.
(3) A eq para hipersuperfície maximal limitante $r(\theta)$ na geometria de Kerr tem sido integrado numericamente. Uma solução única aparentemente existe para todo $a^2 < M^2$. A dependência angular é muito fraco e uma aproximação analítica acurada para 1% é

$$R_{lim} = 3M[1 + (1 - 8a^2/9M^2)^{1/2}]/4$$

Parece muito provável que, estudo numérico de colapso não-esférico usando ramificação maximal mostraria que em tempo cedo as hipersuperfície tenderiam para este plano limitante na região exterior para a matéria colapsando.

Desejaria que o Sr. pudesse dar-me uma opinião sobre este estudo, bem como das cartas anteriores que enviei, pois uma métrica do tipo Gödel é compatível com um Universo de espaço-tempo de Kerr-Newman; tomando espaço-tempo assimétrico para curvas espaço-temporais fechadas, decorrentes da quebra do PT (com superfícies de curvas fechadas lisas e não-compactas) para superfícies orientadas e não-orientadas para os vetores.

Aguardo sua resposta.
Com os meus agradecimentos
Antonio Carlos Motta

Rua Jules Martin, 130
03183 - SP/SP.