Académie royale de Belgique — Koninklijke Belgische Academie

BULLETIN DE LA CLASSE DES SCIENCES — MEDEDELINGEN VAN DE KLASSE DER WETENSCHAPPEN

5e Série. — Tome XXXVIII — 5de Reeks. — Boek XXXVIII

1952

EXTRAIT — UITTREKSEL

Sur la méthode d'itération de Wiarda et Bückner pour la résolution de l'équation de Fredholm (II)

PAR

Mario SCHÖNBERG

BRUXELLES
PALAIS DES ACADÉMIES
RUE DUCALE, 1

BRUSSEL
PALEIS DER ACADEMIËN
HERTOGELIJKESTRAAT, 1

1952

Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 2 février 1952

ANALYSE MATHÉMATIQUE

Sur la méthode d'itération de Wiarda et Bückner pour la résolution de l'équation de Fredholm (II),

par Mario SCHÖNBERG (*)

Résumé. — Deux généralisations différentes des méthodes d'itération de Wiarda et Bückner sont données. Les transformations de l'équation fonctionnelle linéaire introduites dans la note précédente sont généralisées et traitées comme des cas particuliers d'une transformation qui se rattache à celle de la méthode de E. Schmidt pour la résolution approchée des équations de Fredholm. Le problème de la résolution des équations fonctionnelles linéaires est étudié en rapport avec le prolongement analytique de la série de Liouville et Neumann dans une algèbre de Banach (anneau de vecteurs normés).

INTRODUCTION

1. Nous avons montré dans la note précédente (1) que les méthodes d'itération de Wiarda (2) et Bückner (3) pouvaient être réduites à la méthode d'itération classique de Liouville et Neumann (méthode des approximations successives) au moyen d'une transformation de l'équation fonctionnelle linéaire en considération :

$$y = f + \lambda \mathrm{K} y. \tag{1}$$

Les notations sont les mêmes que dans la note précédente : λ est un nombre réel ou complexe non nul ; K un opérateur linéaire borné défini partout dans un espace de Hilbert H ou de Banach B et f un vecteur non nul quelconque de cet espace. Nous étudierons dans cette note un type de transformations de l'équation (1) beaucoup plus général que celles attachées aux méthodes de Wiarda et Bückner. Ces transformations généra-

(*) Présenté par M. J. Géhéniau.

lisent aussi la transformation de l'équation de Fredholm qui intervient dans la méthode de résolution de Schmidt (4). En fait, la méthode que nous considérerons est une généralisation de celle de Schmidt et qui contient aussi comme cas particuliers celles de Wiarda et Bückner.

La résolution de l'équation (1) est un problème équivalent à celui de la détermination de l'opérateur $(1 - \lambda K)^{-1}$. Lorsque la valeur absolue de λ est assez petite, $(1 - \lambda K)^{-1}$ peut être calculé au moyen de son développement en série de puissances de λ

$$(1 - \lambda K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n \tag{2}$$

ce qui conduit à la solution de Liouville et Neumann. Il est plus intéressant de considérer (2) comme un développement en série de puissances de l'opérateur λK, qui converge lorsque la norme de λK est assez petite, c'est-à-dire de considérer le développement de $(1 - \lambda K)^{-1}$ comme fonction de λK. Ce point de vue conduit à envisager la solution de (1) comme problème de prolongement de la fonction analytique de λK définie, pour des λK assez petits en norme, par la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n$. La généralisation de la méthode de Schmidt que nous donnons se rattache au type de prolongement analytique le plus simple de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n$.

Les méthodes les plus importantes de prolongement de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n$ sont celles de développement de $(1 - \lambda K)^{-1}$ en série de polynômes de K. Les méthodes de Wiarda et Bückner, ainsi que celle de Fredholm, correspondent à de telles séries de polynômes. Nous donnons une méthode très générale pour développer $(1 - \lambda K)^{-1}$ en série de polynômes de λK.

Généralisation de la méthode de Schmidt.

2. La méthode de Schmidt (4) pour la résolution de l'équation de Fredholm

$$y(s) = f(s) + \lambda \int_a K(s, t) y(t) dt \tag{3}$$

se base sur la décomposition du noyau $K(s, t)$ en un noyau dégénéré $G(s, t)$

$$G(s, t) = \sum_{k=1}^{r} u_k(s)v_k(t) \tag{4}$$

et un noyau $H(s, t)$ tel que l'équation intégrale suivante

$$Z(s) = g(s) + \lambda \int_a^b H(s, t)Z(t)dt \tag{5}$$

soit résoluble par approximations successives. Nous généraliserons d'abord cette méthode, en décomposant K en deux opérateurs G et H définis partout dans l'espace vectoriel en considération

$$K = G + H \tag{6}$$

et en imposant à H la condition que $(1 - \lambda H)^{-1}$ soit développable en série de Liouville et Neumann

$$(1 - \lambda H)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n H^n. \tag{7}$$

En écrivant (1) sous la forme suivante

$$y - \lambda Hy = f + \lambda Gy \tag{8}$$

on voit que y satisfait à l'équation linéaire transformée

$$y = (1 - \lambda H)^{-1}f + \lambda(1 - \lambda H)^{-1}Gy. \tag{9}$$

La transformation de (1) en (9) revient à écrire $(1 - \lambda K)^{-1}$ sous la forme suivante :

$$(1 - \lambda K)^{-1} = [1 - (1 - \lambda H)^{-1}\lambda G]^{-1}(1 - \lambda H)^{-1}. \tag{10}$$

Nous n'avons imposé aucune condition à l'opérateur G. Pour avoir une analogie complète avec la méthode de Schmidt, il faudrait pouvoir choisir un G de la forme suivante

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \mathcal{F}_k \;(\;\;). \tag{11}$$

les u_k étant des vecteurs de l'espace en considération, H ou B, et les $\mathcal{F}_k$ des fonctionelles linéaires définies partout dans H ou B :

$$Gf = \sum_{k=1}^{r} u_k \mathcal{F}_k(f). \tag{12}$$

Dans ce cas l'équation (9) devient

$$y = (1 - \lambda H)^{-1} f + \lambda \sum_{k=1}^{r} \mathcal{F}_k(y)(1 - \lambda H)^{-1} u_k \tag{13}$$

et les $\mathcal{F}_k(y)$ sont déterminés par le système fini d'équations linéaires suivant :

$$\mathcal{F}_k(y) = \mathcal{F}_k((1 - \lambda H)^{-1} f) + \lambda \sum_{l=1}^{r} \mathcal{F}_l(y) \mathcal{F}_k((1 - \lambda H)^{-1} u_l). \tag{14}$$

Nous appellerons transformation de Schmidt généralisée celle qui fait passer de (1) à (9), quels que soient G et H définis dans tout H (ou dans tout B), ainsi que $(1 - \lambda H)^{-1}$. Le cas qui nous intéresse le plus est celui dans lequel l'opérateur $[1 - (1 - \lambda H)^{-1} \lambda G]^{-1}$ peut être calculé par un développement de Liouville-Neumann

$$[1 - (1 - \lambda H)^{-1} \lambda G]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - \lambda H)^{-1} \lambda G]^n \tag{15}$$

et $(1 - \lambda H)^{-1}$ est connu. Lorsque les développements (7) et (15) sont tous les deux valables, on peut calculer $(1 - U)^{-1}$ pour $U = \lambda K$ par prolongement analytique radial de la série $\sum_{n=0}^{\infty} U'^n$. En effet, la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_0^n$ nous donne $(1 - U_0)^{-1}$ pour $U_0 = \lambda H$ et nous obtenons une série pour $(1 - U)^{-1}$ en développant cet opérateur selon les puissances de $(1 - U_0)^{-1}(U - U_0)$:

$$(1 - U)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - U_0)^{-1}(U - U_0)]^n (1 - U_0)^{-1}. \tag{16}$$

L'analogie avec le prolongement analytique radial des fonctions d'une variable numérique est plus complète lorsque $(1 - U_0)^{-1}$ et $U - U_0$ sont des opérateurs commutables :

$$(1 - U)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - U_0)^{-(n+1)} (U - U_0)^n. \tag{17}$$

C'est ce qui arrive lorsque λH est un multiple de l'opérateur unité :

$$U_0 = \lambda H = \xi_0 \cdot 1 \qquad |\xi_0| < 1. \tag{18}$$

Ce cas n'est pas trivial, car il conduit à la méthode de Wiarda. En effet, nous avons :

$$y = (1 - \lambda K)^{-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \xi_0)^{-(n+1)} (\lambda K - \xi_0 \cdot 1)^n f =$$

$$= (1 - \theta) \sum_{n=0}^{\infty} [\theta + (1 - \theta)\lambda K]^n f \tag{19}$$

$$\theta = \frac{\xi_0}{\xi_0 - 1} . \tag{20}$$

La série (19), qui conduit à la méthode de Wiarda, est donc essentiellement obtenue par prolongement analytique radial en λK de celle de Liouville et Neumann $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n f$. Ce résultat très simple explique les relations entre la méthode de Wiarda et la sommation de Euler-Knopp de la série de Liouville et Neumann indiquée par Lorentz (voir Bückner (1948)), en tenant compte de la relation entre le prolongement analytique radial d'une série de Taylor et la sommation de Euler-Knopp établie par Vermes (5).

Nous avons montré dans la note précédente que la solution de Bückner de l'équation (1) peut être obtenue en appliquant la méthode des approximations successives à l'équation transformée :

$$y = R_{p-1}(\lambda K) f + Q_p(\lambda K) y \tag{21}$$

$$Q_p(\lambda K) = \prod_{i=1}^{p} [\theta_i + (1 - \theta_i)\lambda K] \tag{22}$$

$$1 - Q_p(\lambda K) = (1 - \lambda K) R_{p-1}(\lambda K). \tag{23}$$

Les θ sont des nombres réels ou complexes différents de 1, tels que le spectre de $R_{p-1}(\lambda K)$ ne contient pas 0. Il existe donc un opérateur H tel que

$$R_{p-1}(\lambda K) = (1 - \lambda H)^{-1} \tag{24}$$

et

$$Q_p(\lambda K) = (1 - \lambda H)^{-1} \lambda G \qquad (G = K - H). \tag{25}$$

L'équation transformée (21) est donc un cas particulier de (9). La solution de Bückner correspond au développement de type (16) de $(1 - \lambda K)^{-1}$

$$(1 - \lambda K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [Q_\rho(\lambda K)]^n R_{\rho-1}(\lambda K) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - \lambda H)^{-1} \lambda G]^n (1 - \lambda H)^{-1} \quad (26)$$

mais en général (26) n'est pas un prolongement analytique radial de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U'^n$.

Nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Les transformations de l'équation* (1) *qui correspondent aux méthodes de Wiarda et Bückner sont des cas particuliers de la transformation de Schmidt généralisée. Dans le cas de Wiarda,* λH *est un multiple de l'opérateur unité et dans celui de Bückner* $R_{\rho-1}(\lambda K) = (1 - \lambda H)^{-1}$.

THÉORÈME II. — *La solution de Wiarda de* (1) *résulte du développement de l'opérateur* $(1 - \lambda K)^{-1}$, *considéré comme fonction de* $U = \lambda K$, *en série de puissances de* $U - U_0$, *avec* $U_0 = \xi_0 \cdot 1$. *Lorsque* $|\xi_0| < 1$, *la série pour* $(1 - \lambda K)^{-1}$ *qui conduit à la solution de Wiarda peut être obtenue par prolongement analytique radial de* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U'^n$, *au moyen du développement taylorien relatif à* U_0, *qui appartient au domaine de convergence de* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U'^n$.

THÉORÈME III. — *La solution de Bückner de* (1) *résulte du développement de* $(1 - \lambda K)^{-1}$, *comme fonction de* $U = \lambda K$, *en série de puissances de* $U - U_0$, *avec* $U_0 = 1 - [R_{\rho-1}(\lambda K)]^{-1}$.

Pour que la série (15) converge, il suffit que

$$\|(1 - \lambda H)^{-1} \lambda G\| < 1 \quad (27)$$

comme il est bien connu, donc :

THÉORÈME IV. — *La transformation de Schmidt généralisée permet de résoudre l'équation* (1) *lorsque* $\|\lambda H\| < 1$ et $\|(1 - \lambda H)^{-1}$ $\lambda G\| < 1$, *au moyen du prolongement analytique radial de* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U'^n$, *en développant* $(1 - U)^{-1}$ *en série de puissances de* $(1 - U_0)^{-1}$ $(U - U_0)$, *avec* $U_0 = \lambda H$, *et en calculant* $(1 - \lambda K)^{-1}$ *au moyen de ce développement.*

3. La transformation de Schmidt généralisée présente un intérêt spécial lorsque λH est une fonction de λK. Nous avons déjà montré que les transformations attachées aux méthodes de Wiarda et Bückner rentrent dans ce type. Lorsque λH est une fonction de λK, il en est de même avec λG et il y a commutabilité de H et G dans des cas très généraux. Il est plus simple de considérer les opérateurs R et Q

$$R = (1 - \lambda H)^{-1} \quad Q = (1 - \lambda H)^{-1}\lambda G \tag{28}$$

au lieu de H et G, car l'équation (9) devient

$$y = Rf + Qy. \tag{29}$$

Dans le cas que nous considérons maintenant, R et Q sont des fonctions de λK. Nous employerons la notation $R(\lambda K)$ et $Q(\lambda K)$ et nous admettrons que

$$R(\xi \cdot 1) = R(\xi) \cdot 1 \quad Q(\xi \cdot 1) = Q(\xi) \cdot 1 \tag{30}$$

ξ étant un nombre complexe quelconque de valeur absolue inférieure à un $\eta > \|\lambda K\|$. Il résulte de (28) que

$$1 - Q = R(1 - \lambda K) \tag{31}$$

donc

$$1 - Q(\xi) = (1 - \xi)R(\xi). \tag{32}$$

Il est intéressant de choisir pour $R(\xi)$ une fonction holomorphe dans une région contenant le cercle centré à l'origine, de rayon $\|\lambda K\|$. Le développement de Taylor de $R(\xi)$

$$R(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \tag{33}$$

nous permet de définir convenablement $R(\lambda K)$

$$R(\lambda K) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n K^n. \tag{34}$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n K^n f$ converge pour un f quelconque, car

$$\| \sum_{n=r}^{s} a_r \lambda^r K^r f \| \leqslant \| \sum_{n=r}^{s} a_r \lambda^r K^r \| \cdot \|f\| \leqslant \sum_{n=r}^{s} \| a_r \lambda^r K^r \| \cdot \|f\| \tag{35}$$

$$\sum_{n=r}^{s} \|a_r \lambda^r K^r\| = \sum_{n=r}^{s} | a_r \lambda^r | \, \|K^r\| \leqslant \sum_{n=r}^{s} | a_r \lambda^r \|K\|^r | \tag{36}$$

et le rayon de convergence de la série (33) est par hypothèse plus grand que $\|\lambda K\|$. L'opérateur $R(\lambda K)$ défini par (34) est borné. En effet, les normes des opérateurs $\sum_{n=0}^{r} a_n \lambda^n K^n$ ne dépassent pas $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n \lambda^n K^n\|$. Il suffit d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus (6) sur la convergence des suites bornées d'opérateurs pour démontrer que

$$\|R(\lambda K)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n \lambda^n K^n\| \tag{37}$$

$Q(\lambda K)$ est aussi un opérateur borné, car

$$\|Qf\| \leqslant [1 + \|1 - \lambda K\| . \|R\|] . \|f\| \tag{38}$$

en conséquence de (31).

Il faut encore assurer que $R(\lambda K)$ soit l'inverse d'un opérateur borné $1 - \lambda H$ défini partout dans l'espace linéaire en considération. Pour cela il faut et il suffit que O n'appartienne pas au spectre de $R(\lambda K)$. D'après un théorème général de Dunford (7), le spectre de $R(\lambda K)$ est l'ensemble des valeurs de la fonction numérique $R(\lambda\sigma)$ sur le spectre (σ) de K, nous devons donc imposer la condition suivante

$$R(\lambda\sigma) \neq 0. \tag{39}$$

Il est important de remarquer que

$$R(\lambda K)f \neq 0. \tag{40}$$

Il résulte du théorème de Dunford que le spectre de $Q(\lambda K)$ est l'ensemble des valeurs de $Q(\lambda\sigma)$ sur le spectre (σ) de K. En conséquence de (32) nous avons

$$1 - Q(\lambda\sigma) = (1 - \sigma\lambda)R(\lambda\sigma) \tag{41}$$

donc 1 ne peut appartenir au spectre de $Q(\lambda K)$ que dans le cas d'un λ^{-1} de (σ), en conséquence de la condition (39). Lorsque 1 n'appartient pas au spectre de $Q(\lambda K)$, l'opérateur $[1 - Q(\lambda K)]^{-1}$ est défini dans tout H (ou dans tout B) et l'équation transformée

$$y = R(\lambda K)f + Q(\lambda K)y \tag{42}$$

a une solution et une seule, quel que soit f. L'opérateur $[1 - Q(\lambda K)]^{-1}$ est d'ailleurs borné, car il est défini partout et son inverse $1 - Q(\lambda K)$ est borné et défini partout (voir la démonstration du théorème employé dans E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*, p. 29, New-York, 1948). Pour que $[1 - Q(\lambda K)]^{-1}$ soit borné et défini partout il faut que 1 n'appartienne pas au spectre de $Q(\lambda K)$, nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Il faut et il suffit que* λ^{-1} *n'appartienne pas au spectre* (σ) *de* K *pour que* (42), *ainsi que* (1), *ait une solution et une seule pour tout* f, *lorsque* $R(\lambda\sigma)$ *ne s'annule pas pour aucune valeur de* (σ). *La solution unique est la même pour* (1) *et* (42).

Pour que la méthode des approximations successives soit applicable à (42), il faut et il suffit que la série $Z_Q(\lambda)$ converge

$$Z_Q(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} [Q(\lambda K)]^n. \tag{43}$$

La convergence de (43) assure l'existence de l'opérateur $[1 - Q(\lambda K)]^{-1}$

$$[1 - Q(\lambda K)]^{-1} = Z_Q(\lambda) \tag{44}$$

qui est défini partout et par conséquent borné. La convergence des itérées de Liouville et Neumann de (42) pour tout f suffit donc pour que 1 n'appartienne pas au spectre de $Q(\lambda K)$ et pour que λ^{-1} n'appartienne pas à (σ). Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Lorsque les itérées de Liouville et Neumann de* (42) *convergent pour tout* f, *les équations* (1) *et* (42) *ont une seule solution et la même, pour tout* f, *et cette solution est la limite des itérées de Liouville et Neumann de* (42), *si* (39) *est satisfaite.* Il est important de remarquer que la validité de (39) a pour conséquence que le domaine de valeurs de $R(\lambda K)$ est tout l'espace vectoriel en considération, H ou B.

Nous avons démontré dans la note précédente (1) que les itérées de Liouville et Neumann d'une équation de type (1) convergent pour tout f, lorsque la borne supérieure des valeurs absolues des $\lambda\sigma$ est inférieure à 1, en particulier lorsque $\|\lambda K\| < 1$. Ces théorèmes sont valables pour l'équation (42), avec les $\lambda\sigma$ remplacés par les $Q(\lambda\sigma)$ et $\|\lambda K\|$ par $\|Q(\lambda K)\|$, lorsque (39) est satisfaite. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème VII. — *Il suffit que* sup $|Q(\lambda\sigma)| < 1$ *et* $R(\lambda\sigma) \neq 0$ sur (σ), *pour que* (1) *et* (42) *aient une seule et même solution pour tout* f, *donnée par la limite des itérées de Liouville et Neumann de* (42) ; *en particulier il suffit que* $R(\lambda\sigma) \neq 0$ *et* $\|Q(\lambda K)\| < 1$.

Nous avons démontré dans la note précédente qu'il faut que sup $|\lambda\sigma| \leqslant 1$, pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n$ converge. Ce théorème peut être appliqué à $Z_Q(\lambda)$, mutatis mutandis :

Théorème VIII. — *Il faut que* sup $|Q(\lambda\sigma)| \leqslant 1$, *pour que les itérées de Liouville et Neumann de* (42) *convergent, lorsque* $R(\lambda\sigma) \neq 0$.

Pour que les itérées de Liouville et Neumann de (42) convergent pour tout f, il faut que

$$|Q(\lambda\sigma)| < 1 \tag{45}$$

sur le spectre discret de K, lorsque (39) est satisfaite. En effet, soit f_σ un vecteur propre de K qui correspond à la valeur σ du spectre discret. Nous avons

$$Kf_\sigma = \sigma f_\sigma \quad R(\lambda K)f_\sigma = R(\lambda\sigma)f_\sigma \quad Q(\lambda K)f_\sigma = Q(\lambda\sigma)f_\sigma \tag{46}$$

par conséquent

$$Z_Q(\lambda)f_\sigma = R(\lambda\sigma)\sum_{n=0}^{\infty}[Q(\lambda\sigma)]^n f_\sigma \tag{47}$$

et il faut que $|Q(\lambda\sigma)| < 1$ pour que cette série converge.

Théorème IX. — *Il faut que* $|Q(\lambda\sigma)| < 1$ *sur le spectre ponctuel de* K, *pour que les itérées de Liouville et Neumann de* (42) *convergent pour tout* f, *lorsque* $R(\lambda\sigma) \neq 0$. *Lorsque le spectre de* K *est purement ponctuel et* $R(\lambda\sigma) \neq 0$, *il faut et il suffit que* $|Q(\lambda\sigma)| < 1$, *pour que les itérées de Liouville et Neumann de* (42) *convergent vers la solution de* (1) *pour tout* f.

La dernière partie de ce théorème est une généralisation de la condition nécessaire et suffisante donnée par Bückner (3), pour les équations de Fredholm à noyau continu ayant une infinité de valeurs caractéristiques différentes, dans le cas de $Q(\lambda K) = Q_\rho(\lambda K)$ (méthode de Bückner).

Pour les applications il est important de pouvoir évaluer l'erreur commise en prenant comme valeur approchée de y celle de l'itérée de Liouville et Neumann d'ordre r de (42) y_r

$$y_r = [Q(\lambda K)]^r y_0 + \sum_{n=0}^{r-1} [Q(\lambda K)]^n R(\lambda K) f \tag{48}$$

y_0 étant le vecteur pris en approximation O. Le développement de la solution y donné par (43) et (44)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} [Q(\lambda K)]^n R(\lambda K) f \tag{49}$$

montre que

$$y - y_r = \sum_{n=r}^{\infty} [Q(\lambda K)]^n R(\lambda K) f - [Q(\lambda K)]^r y_0. \tag{50}$$

Par conséquent nous avons

$$\|y - y_r\| \leqslant \sum_{n=r}^{\infty} \|Q(\lambda K)\|^n \|R(\lambda K) f\| + \|Q(\lambda K)\|^r \|y_0\| \tag{51}$$

et

$$\|y - y_r\| \leqslant \|Q(\lambda K)\|^r \left\{ \frac{\|R(\lambda K) f\|}{1 - \|Q(\lambda K)\|} + \|y_0\| \right\}. \tag{52}$$

En prenant

$$y_0 = R(\lambda K) f \tag{53}$$

on obtient de (50)

$$\|y - y_r\| \leqslant \sum_{n=r+1}^{\infty} \|Q(\lambda K)\|^n \|R(\lambda K) f\| =$$

$$= \|Q(\lambda K)\|^{r+1} \frac{\|R(\lambda K) f\|}{1 - \|Q(\lambda K)\|} \cdot \tag{54}$$

En particulier, les formules (52) et (54) sont applicables aux méthodes de Bückner et Wiarda.

Développements de $(1 - \lambda K)^{-1}$ *en série de polynômes de* K.

4. La méthode de Liouville et Neumann correspond au développement (2) de $(1 - \lambda K)^{-1}$ en série de puissances de K. La série (2) est analogue à la formule élémentaire qui donne la somme d'une progression géométrique

$$(1 - \xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \qquad |\xi| < 1. \tag{55}$$

La méthode de Bückner correspond au développement suivant de $(1 - \lambda K)^{-1}$ en série de polynômes de λK

$$(1 - \lambda K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [Q_p(\lambda K)]^n R_{p-1}(\lambda K). \tag{56}$$

Il est intéressant de remarquer que (56) correspond au développement suivant de $(1 - \xi)^{-1}$

$$(1 - \xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [Q_p(\xi)]^n R_{p-1}(\xi) \qquad |Q_p(\xi)| < 1 \tag{57}$$

et que la condition de convergence de (57) $|Q_p(\xi)| < 1$ est analogue à celle du théorème VII $\sup\limits_{\sigma} |Q_p(\lambda\sigma)| < 1$.

Soit λ un nombre complexe tel que le spectre de λK ne contienne pas le nombre 1. Prenons une courbe fermée rectifiable C contenant dans son intérieur le spectre de λK et laissant au dehors le point 1, telle que $(1 - \xi)^{-1}$ soit développable en série de polynômes $P_n(\xi)$ uniformément convergente dans son intérieur (C est orientée dans le sens anti-horaire) :

$$(1 - \xi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\xi). \tag{58}$$

D'après un théorème général (voir E. Hille, *Functional analysis and semi groups*, p. 118).

$$(1 - \lambda K)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1 - \xi)^{-1} (\xi \cdot 1 - \lambda K)^{-1} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C P_n(\xi)(\xi \cdot 1 - \lambda K)^{-1} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\lambda K). \tag{59}$$

Il est toujours possible de développer en série de polynômes uniformément convergente dans un domaine simplement connexe toute fonction holomorphe dans ce domaine (voir E. Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes*, ch. II, Paris 1917). Nous pouvons donc développer toujours $(1 - \lambda K)^{-1}$ en série de polynômes de λK par la formule (59), lorsque λ^{-1} n'appartient pas au spectre de K, nous obtenons ainsi une autre généralisation intéressante de la méthode de Bückner :

THÉORÈME X. — *Il est toujours possible de développer* $(1 - \lambda K)^{-1}$ *en série de polynômes de* λK, *lorsque* λ^{-1} *n'appartient pas au spectre de* K, *en remplaçant* ξ *par* λK *dans un développement de* $(1 - \xi)^{-1}$ *en série uniformément convergente de polynômes dans un domaine simplement connexe contenant dans son intérieur le spectre de* λK *et laissant au dehors le point* 1.

La méthode de Fredholm peut être étendue à l'équation (1), lorsque K est un opérateur de l'espace de Hilbert dont les éléments de matrice par rapport à un système orthonormal complet $a_{\alpha\beta}$ satisfont à la condition :

$$\sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha\beta}|^2 < \infty \tag{60}$$

Smithies (8) a montré que la solution de (1) est donnée par une série de polynômes en K appliquée à f

$$y = [\delta(\lambda)]^{-1}\Delta(\lambda)f \qquad \delta(\lambda) \neq 0 \tag{61}$$

$\delta(\lambda)$ étant une fonction entière :

$$\delta(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \delta_n \tag{62}$$

$$\Delta(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Delta_n. \tag{63}$$

Les opérateurs Δ_n sont déterminés par les équations suivantes :

$$\Delta_0 = 1 \qquad \Delta_n = \delta_n \cdot 1 + K\Delta_{n-1}. \tag{64}$$

Les δ_n doivent être choisis de façon à rendre convergentes les séries (62) et (63). Lorsque (60) est satisfaite, on peut prendre :

$$\delta_0 = 1 \qquad \delta_n = \frac{(-1)^n}{n!} Q_n \tag{65}$$

$$Q_n = \begin{vmatrix} 0 & n-1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & n-2 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & 0 & n-3 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \ldots\ldots & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \end{vmatrix} \tag{66}$$

Les σ_n sont les traces des matrices des opérateurs K^n. La solution (61) correspond au développement suivant de $(1 - \lambda K)^{-1}$ en série de polynômes de K

$$(1 - \lambda K)^{-1} = [\delta(\lambda)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Delta_n. \tag{67}$$

Le développement (64) n'est pas dérivé d'une série de polynômes pour $(1 - \xi)^{-1}$ en remplaçant ξ par λK, car les traces σ_n deviennent infinies lorsque K est un multiple de l'opérateur unité. Le développement (67) n'est d'ailleurs applicable qu'à un type spécial d'opérateurs bornés qui ont un spectre purement ponctuel.

RÉFÉRENCES

(1) M. Schönberg, *Bul. Acad. Roy. Belgique*, **37**, 1141, 1951.

(2) G. Wiarda, Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen, Leipzig, 1930, pg. 126.

(3) H. Bückner, *Duke Math. Jour.*, **15**, 197, 1948.
— *Math. Nachr.*, **2**, 304, 1949.

(4) E. Schmidt, *Math. Ann.*, **65**, 370, 1908.

(5) P. Vermes, *Am. Jour. Math.*, **71**, 541, 1949.

(6) S. Banach et H. Steinhaus, *Fund. Math.*, IX, 53, 1927.

(7) N. Dunford, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54**, 185, 1943.

(8) F. Smithies, *Duke Math. Jour.*, **8**, 107, 1941.