M. SCHÖNBERG

Sur la Théorie des Perturbations en Mécanique Quantique (II). Spectres continus et Mixtes.

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI EDITORE
1951

IL NUOVO CIMENTO Vol. VII, N. 6 1 Giugno 1951

Sur la Théorie des Perturbations en Mécanique Quantique (II). Spectres continus et Mixtes.

M. Schönberg

Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles

(ricevuto il 6 Aprile 1951)

Résumé. — Les méthodes données dans un travail précédent (1), pour le cas de spectres discrets, sont généralisées pour les cas de spectres continus et mixtes. On considère des systèmes de particules (*) et des champs quantiques. On montre que la self-energy d'un état du spectre continu n'est pas déterminée par le calcul de perturbations, à cause de l'ambiguïté dans la correspondance entre niveaux perturbés et non perturbés. Une forme modifiée de l'équation de Heitler et Peng est donnée, pour les cas de self-energy. On montre qu'il est possible d'éliminer les termes séculaires dans le développement de l'opérateur unitaire du mouvement.

(*) Les résultats pour les systèmes de particules ont été exposés au Symposium sur les Mathématiques de l'Electron, réalisé en Avril 1949 à l'Université Libre de Bruxelles.

Introduction.

1. – Dans la partie précédente de ce travail (1), nous avons étudié la théorie des perturbations pour les systèmes à spectres discrets. Les modifications des méthodes usuelles de Schrödinger et Dirac, que nous avons données, ont l'avantage de permettre le passage direct du traitement stationnaire au traitement non stationnaire, ainsi que de donner des développements sans termes séculaires. Dans ce travail, nous donnerons l'extension de ces méthodes pour des cas plus généraux de spectres mixtes, ainsi que pour des systèmes à spectres continus, en admettant toujours une correspondance entre états perturbés et non perturbés.

---

(1) M. Schönberg: *Nuovo Cimento*, 8, 241 (1951).

Le passage du cas d'un spectre discret à ceux de spectres continus ou mixtes introduit des circonstances essentiellement nouvelles, en changeant profondément la nature de certains opérateurs fondamentaux. Ainsi, l'opérateur S_1, qui joue un rôle fondamental dans le traitement stationnaire des perturbations, et qui est unitaire dans le cas d'un spectre discret, ne l'est plus dans les cas de spectres continus ou mixtes. Les physiciens ont l'habitude de traiter le cas d'un spectre continu comme la limite de celui d'un spectre discret, sans se préoccuper assez de certaines différences fondamentales, ce qui peut conduire à des erreurs graves, surtout dans le cas de systèmes de champs en interaction. Nos méthodes sont particulièrement convenables pour traiter des spectres continus ou mixtes et conduisent d'une façon très simple à la théorie du damping de HEITLER et PENG (2), GORA (3), WILSON (4) et SOKOLOV (5), ainsi qu'à la théorie de la matrice caractéristique de HEISENBERG (6) et à certains résultats de la théorie des collisions de SCHWINGER (7). Dans le cas de spectres mixtes, nos méthodes donnent des résultats un peu plus généraux que celles employées par ces auteurs et tiennent compte des déplacements des niveaux discrets. La possibilité de passer directement du traitement stationnaire au traitement non stationnaire nous permet d'obtenir très facilement les conditions qui caractérisent les fonctions d'onde pour les problèmes de collisions, dans des cas très généraux. L'introduction des opérateurs de projection pour les niveaux du spectre continu donne la description mathémathique naturelle des couches d'états de même énergie, qui interviennent dans la théorie des collisions.

Dans la première partie de ce travail, nous faisons correspondre à chaque état du spectre continu non perturbé un état perturbé de même énergie, comme l'on fait d'habitude dans la théorie ordinaire des collisions. Dans la seconde partie, nous faisons correspondre à chaque état non perturbé un état perturbé d'énergie différente, en général, de façon à tenir compte des corrections de self-energy. Cela n'offre pas de difficultés pour les états du spectre discret, mais pour ceux du spectre continu la correspondance avec le spectre non perturbé peut être établie d'une infinité de façons différentes, et les self-energies des états du spectre continu ne seront déterminées que si l'on introduit un criterium restrictif spécial. Chaque façon différente d'établir la correspondance entre états perturbés et non perturbés est associée de façon univoque à une

---

(2) W. HEITLER et H. W. PENG: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **38**, 296 (1942); W. HEITLER: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **38**, 291 (1941).

(3) E. GORA: *Zeits. f. Phys.*, **120**, 121 (1943).

(4) A. H. WILSON: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **37**, 301 (1941).

(5) A. SOKOLOV: *Journ. of Phys. U.S.S.R.*, **5**, 231 (1941).

(6) W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **120**, 513 et 673 (1943); *Zeits. f. Naturforsch.*, **1**, 608 (1946).

(7) J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948).

décomposition corrélative de la hamiltonienne du système perturbé. Les méthodes de calcul des self-energies employées jusqu'à présent se basent essentiellement sur la décomposition de la hamiltonienne perturbée en celle des champs sans interaction (hamiltonienne non perturbée) et en hamiltonienne d'interaction (perturbation) (*). Cette décomposition correspond à prendre des états correspondants de même énergie sur les spectres continus perturbés et non perturbés, et elle doit conduire à une self-energy nulle pour l'électron libre dans un calcul de perturbations cohérent, basé sur une telle correspondance. Ce fait n'apparait pas clairement dans les calculs de la self-energy, à cause des divergences qui apparaissent dans les développements en série employés (développements en série de puissances d'une constante de couplage).

Nos méthodes conduisent à une modification de l'équation de HEITLER et PENG (2) lorsqu'il y a self-energy, la couche d'états intervenant dans la collision étant celle des énergies perturbées et non plus celle des énergies non perturbées. Cette équation de HEITLER et PENG modifiée ne coïncide cependant pas avec celle proposée par HEITLER et MA (9), qui ont cherché à généraliser la transformation de BLOCH et NORDSIECK (10). Nous ne discuterons pas la généralisation de la transformation de BLOCH et NORDSIECK dans ce travail, mais nous la considérerons dans un travail suivant.

Dans l'étude des spectres discrets (1), nous avons montré qu'il est possible de modifier le développement de l'opérateur unitaire du mouvement de façon à en éliminer les termes séculaires. Nous obtenons un résultat équivalent pour les spectres continus, dans ce travail, quelle que soit la façon de faire correspondre les niveaux continus perturbés et non perturbés, au moyen d'identités déduites du traitement stationnaire des perturbations, c'est à dire, par une méthode analogue à celle employée pour les spectres discrets. Il est intéressant de remarquer que les identités que nous permettent d'éliminer les termes séculaires, en prenant la somme de contributions venant d'approximations différentes, correspondent aux équations qui déterminent les déplacements des niveaux discrets par la perturbation. En particulier, quand on décompose la hamiltonienne du système en hamiltonienne non perturbée et en perturbation, ces identités expriment que les déplacements des niveaux du spectre continu

---

(*) Dans certains travaux récents sur la théorie des champs, on a employé des décompositions un peu différentes. Ainsi, DYSON (8) ajoute un terme correctif à l'interaction pour tenir compte du fait que la masse observable de l'électron contient déjà la self-energy de l'électron libre en repos, c'est à dire la masse électromagnétique. L'introduction d'une telle correction n'est pas nécessaire, lorsqu'on fait correspondre des états de même énergie sur les parties continues des spectres perturbés et non perturbés.

(8) F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, 75, 486 et 1736 (1949).

(9) W. HEITLER et S. T. MA: *Phil. Mag.*, 11, 651 (1949).

(10) F. BLOCH et A. NORDSIECK: *Phys. Rev.*, 52, 54 (1937).

sont nuls, ce dont on ne tient pas compte dans les développements en série de l'opérateur unitaire du mouvement de la méthode de la variation des constantes de Dirac et dans ceux de la théorie de FEYNMAN ([11]) et DYSON ([8]).

Récemment FERRETTI ([12]) a développé une théorie de perturbations quantiques dont plusieurs résultats sont équivalents à quelques uns de ceux de nôtre travail précédent ([1]) et de la première partie de ce travail. Le point de depart de FERRETTI est le traitement dynamique des perturbations de la méthode de la variation des constantes, associé à une méthode spéciale de variation adiabatique de l'interaction. Nos développements dynamiques, basés sur une transformation de contact un peu différente de celle de la méthode de la variation des constantes, se rattachent directement au traitement stationnaire et permettent d'éviter l'emploi d'une interaction variant adiabatiquement.

PREMIÈRE PARTIE

PERTURBATIONS DE SYSTÈMES SANS SELF-ENERGY

2.– Nous considérerons des systèmes dynamiques dont la hamiltonienne H est un polynôme ou série de puissances d'un paramètre réel λ petit par rapport à 1

$$H = H_0 + H_p\,, \qquad H_p = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n H_n\,, \qquad \lambda \ll 1\,. \tag{1}$$

H_0 est la hamiltonienne non perturbée et H_p est la perturbation. Dans la partie déjà publiée de ce travail ([1]), nous avons admis que les spectres de H et H_0 étaient discrets; maintenant nous leverons cette restriction, mais nous admettrons la possibilité d'établir une correspondance entre les niveaux discrets de H et ceux de H_0, de façon à avoir

$$E_l^{(0)} = \lim_{\lambda\to 0} E_l\,, \qquad \Phi_l^{(0)} = \lim_{\lambda\to 0} \Phi_l\,, \tag{2}$$

les E_l et $E_l^{(0)}$ étant des valeurs propres correspondantes de H et H_0 et les Φ_l et $\Phi_l^{(0)}$ les fonctions propres respectives

$$H\Phi_l = E_l \Phi_l\,, \qquad H_0 \Phi_l^{(0)} = E_l^{(0)} \Phi_l^{(0)}\,. \tag{3}$$

Nous admettrons que les valeurs propres des spectres continus de H et H_0 ont une dégénérescence infinie et que les différentes fonctions propres du même niveau peuvent être numérotées par des paramètres θ, tant pour H_0 comme

([11]) R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 584 et 749 (1949).
([12]) B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **8**, 108 (1951).

pour H

$$H\Phi_{E,\theta} = E\Phi_{E,\theta}\,, \qquad H_0\Phi^{(0)}_{E,\theta} = E\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,. \tag{4}$$

Les spectres continus de H et H_0 seront pris coïncidants et nous établirons la correspondence

$$\Phi^{(0)}_{E,\theta} \to \Phi_{E,\theta}\,. \tag{2a}$$

Nous prendrons toutes les fonctions propres normées

$$\begin{cases} (\Phi_l, \Phi_{l'}) = \delta_{ll'}\,, & (\Phi_{E,\theta}, \Phi_{E',\theta'}) = \delta(E-E')\delta(\theta-\theta')\,, \quad (\Phi_l, \Phi_{E,\theta}) = 0 \\ (\Phi^{(0)}_l, \Phi^{(0)}_{l'}) = \delta_{ll'}\,, & (\Phi^{(0)}_{E,\theta}, \Phi^{(0)}_{E',\theta'}) = \delta(E-E')\delta(\theta-\theta')\,, \quad (\Phi^{(0)}_l, \Phi^{(0)}_{E,\theta}) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Nous utiliserons une décomposition de H semblable à celle du spectre discret

$$H = J + I\,; \tag{6}$$

J étant défini par les équations suivantes

$$J\Phi^{(0)}_l = E_l\Phi^{(0)}_l\,, \qquad J\Phi^{(0)}_{E,\theta} = E\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,. \tag{7}$$

Nous admettrons toujours qu'il n'y a pas des points communs aux parties continues et discrètes des spectres perturbés et non perturbés.

Les décompositions spectrales de H, H_0 et J sont

$$H = \sum_l E_l P_l + \int E P_{E,\theta}\, dE\, d\theta\,, \tag{8a}$$

$$H_0 = \sum_l E^{(0)}_l P^{(0)}_l + \int E P^{(0)}_{E,\theta}\, dE\, d\theta\,, \tag{8b}$$

$$J = \sum_l E_l P^{(0)}_l + \int E P^{(0)}_{E,\theta}\, dE\, d\theta\,, \tag{8c}$$

les opérateurs de projection étant définis de la façon usuelle

$$\begin{cases} P_l\psi = \Phi_l(\Phi_l, \psi)\,, & P_{E,\theta}\psi = \Phi_{E,\theta}(\Phi_{E,\theta}, \psi)\,, \\ P^{(0)}_l\psi = \Phi^{(0)}_l(\Phi^{(0)}_l, \psi)\,, & P^{(0)}_{E,\theta}\psi = \Phi^{(0)}_{E,\theta}(\Phi^{(0)}_{E,\theta}, \psi)\,. \end{cases} \tag{9}$$

Nous avons

$$P^{(0)}_l P^{(0)}_{l'} = \delta_{ll'}P^{(0)}_l\,, \quad P^{(0)}_l P^{(0)}_{E,\theta} = 0\,, \quad P^{(0)}_{E,\theta}P^{(0)}_{E',\theta'} = \delta(E-E')\delta(\theta-\theta')\,, \tag{10}$$

$$\sum_l P^{(0)}_l + \int P^{(0)}_{E,\theta}\, dE\, d\theta = 1\,. \tag{11}$$

Nous utiliserons aussi les opérateurs dyadiques $P^{(0)}_{l,l'}$, $P^{(0)}_{l,E;\theta}$, $P^{(0)}_{E,\theta;l}$, $P^{(0)}_{E;\theta;E',\theta'}$

$$\begin{cases} P^{(0)}_{l,l'}\psi = \Phi^{(0)}_l(\Phi^{(0)}_{l'}, \psi)\,, & P^{(0)}_{l;E,\theta}\psi = \Phi^{(0)}_l(\Phi^{(0)}_{E,\theta}, \psi) \\ P^{(0)}_{E,\theta;l}\psi = \Phi^{(0)}_{E,\theta}(\Phi^{(0)}_l, \psi)\,, & P^{(0)}_{E,\theta;E',\theta'}\psi = \Phi^{(0)}_{E,\theta}(\Phi^{(0)}_{E',\theta'}, \psi)\,. \end{cases} \tag{12}$$

Il résulte de (12) que

$$(13)\quad \begin{cases} P^{(0)}_{l,l'}P^{(0)}_{l'',l'''} = \delta_{l',l''}P^{(0)}_{l,l'''}\,, \quad P^{(0)}_{l;E,\theta}P^{(0)}_{E',\theta';l'} = \delta(E-E')\delta(\theta-\theta')P^{(0)}_{l,l'}\,, \\ P^{(0)}_{E,\theta;E',\theta'}P^{(0)}_{E'',\theta'';E''',\theta'''} = P^{(0)}_{E,\theta;E''',\theta'''}\delta(E'-E'')\delta(\theta'-\theta'')\,. \end{cases}$$

Un opérateur quelconque A peut être décomposé en dyadiques

$$(14)\begin{cases} A = \sum\limits_{l,l'} P^{(0)}_{l,l'}\langle l \mid A \mid l'\rangle + \sum\limits_{l}\int P^{(0)}_{l;E,\theta}\langle l \mid A \mid E,\,\theta\rangle\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}\theta\, + \\ + \sum\limits_{l}\int P^{(0)}_{E,\theta;l}\langle E,\,\theta \mid A \mid l\rangle\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}\theta + \iint P^{(0)}_{E,\theta;E',\theta'}\langle E,\,\theta \mid A \mid E',\,\theta'\rangle\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}\theta'\,, \end{cases}$$

les $\langle \mid A \mid \rangle$ étant les éléments de matrice de A dans la représentation de H_0 et des θ.

Il est utile de considérer les opérateurs totaux de projection d'un niveau E

$$(15)\qquad P_E = \int P_{E,\theta}\,\mathrm{d}\theta\,, \qquad P^{(0)}_E = \int P^{(0)}_{E,\theta}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Les fonctions $F(J)$ ont la décomposition spectrale suivante

$$(16)\qquad F(J) = \sum F(E_l)P^{(0)}_l + \int F(E)P^{(0)}_E\,\mathrm{d}E\,,$$

parce que

$$(17)\qquad P^{(0)}_E P^{(0)}_{E'} = \delta(E-E')P^{(0)}_E\,, \qquad P^{(0)}_l P^{(0)}_E = 0\,.$$

La décomposition spectrale de H se ramène à la solution de l'équation

$$(18)\qquad HS = SJ\,,$$

parce que les S transforment les fonctions propres de H_0 en fonctions propres de H

$$(19)\quad \begin{cases} H(S\Phi^{(0)}_l) = S(J\Phi^{(0)}_l) = E_l(S\Phi^{(0)}_l)\,, \\ H(S\Phi^{(0)}_{E,\theta}) = S(J\Phi^{(0)}_{E,\theta}) = E\,(S\Phi^{(0)}_{E,\theta})\,. \end{cases}$$

Nous pouvons remplacer (18) par le système d'équations

$$(20)\qquad HSP^{(0)}_l = E_l SP^{(0)}_l\,, \qquad HSP^{(0)}_E = ESP^{(0)}_E\,,$$

qui peuvent être mises sous la forme

$$(21)\qquad (J-E_l)SP^{(0)}_l = -ISP^{(0)}_l\,, \qquad (J-E)SP^{(0)}_E = -ISP^{(0)}_E\,.$$

Pour résoudre le système (21) nous introduirons l'opérateur $K(u)$

$$K(u) = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\,[i(J-u)\tau]\,\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{22}$$

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\tau}{|\tau|}\,, \tag{23}$$

u étant un nombre. En tenant compte de (16), on voit facilement que

$$\left\{\begin{aligned} &K(u) = (u-J)^{-1} \quad (u \text{ n'appartenant pas au spectre de } J)\,,\\ &K(E_l) = \sum_{l'\neq l} P_{l'}^{(0)}(E_l - E_{l'})^{-1} + \int P_{E'}^{(0)}(E_l - E')^{-1}\,\mathrm{d}E'\,,\\ &K(E) = \sum_{l'} P_{l'}^{(0)}(E - E_{l'})^{-1} + \text{v.p.}\int P_{E'}^{(0)}(E - E')^{-1}\,\mathrm{d}E'\,, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

v.p. indiquant la valeur principale de l'intégrale.

Nous obtenons de la deuxième équation (24) la relation suivante .

$$K(E_l)(J - E_l) = -1 + P_l^{(0)}\,. \tag{25}$$

D'autre part, il résulte de (22) que

$$\begin{aligned} K(E)(J-E) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\{\exp\,[i(J-E)\tau]\}\,\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\ &= -1 + \lim_{\tau\to\infty}\cos\,[(J-E)\tau]\,. \end{aligned} \tag{26}$$

En tenant compte de (25) et (26), nous obtenons de (21)

$$\left\{\begin{aligned} SP_l^{(0)} &= P_l^{(0)}SP_l^{(0)} + K(E_l)ISP_l^{(0)}\,,\\ SP_E^{(0)} &= \lim_{\tau\to\infty}\cos\,[(J-E)\tau]SP_E^{(0)} + K(E)ISP_E^{(0)}\,, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

donc

$$\left\{\begin{aligned} SP_l^{(0)} &= [1 - K(E_l)I]^{-1}P_l^{(0)}SP_l^{(0)}\,,\\ SP_E^{(0)} &= [1 - K(E)I]^{-1}\lim_{\tau\to\infty}\cos\,[(J-E)\tau]SP_E^{(0)}\,, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

et la solution générale de (18) est

$$\begin{aligned} S = \sum_l\,&[1 - K(E_l)I]^{-1}P_l^{(0)}SP_l^{(0)} + \\ &+ \lim_{\tau\to\infty}\int \mathrm{d}E\,[1-K(E)I]^{-1}\cos\,[(J-E)\tau]SP_E^{(0)} \text{ (}^{13}\text{)}. \end{aligned} \tag{29}$$

([13]) Dans les équations précédentes l'opération $\lim\limits_{\tau\to\infty}$ est une limite généralisée, pour laquelle $\lim\limits_{\tau\to\infty}\exp\,[ia\tau] = 0$ (voir Hardy: *Divergent series*, Oxford, 1949), pg. 12.

Nous définirons maintenant la partie diagonale A_d d'un opérateur A

$$(30)\qquad A_d = \sum_{l'} P_{l'}^{(0)} A P_{l'}^{(0)} + \lim_{\tau\to\infty} \int \cos\,[(J - E')\tau] A P_{E'}^{(0)} \,\mathrm{d}E' =$$

$$= \sum_{l'} P_{l'}^{(0)} A P_{l'}^{(0)} + \lim_{\tau\to\infty} \iint \cos\,[(E - E')\tau] P_E^{(0)} A P_{E'}^{(0)} \,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}E'.$$

A_d commute avec les $P_l^{(0)}$, mais ne commute pas nécessairement avec les $P_E^{(0)}$

$$(31)\qquad [A_d, P_l^{(0)}] = 0\,, \qquad [A_d, P_E^{(0)}] \neq 0\,.$$

Nous pouvons mettre (29) sous la forme suivante

$$(32)\qquad S = \left\{ \sum_l [1 - K(E_l)I]^{-1} P_l^{(0)} + \int \mathrm{d}E [1 - K(E)I]^{-1} P_E^{(0)} \right\} S_d\,.$$

Cette équation montre que S est déterminé par sa partie diagonale. Nous pouvons obtenir de (32) un développement de S en série de puissances de I, au moyen de la formule bien connue

$$(33)\qquad [1 - K(u)I]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [K(u)I]^n\,.$$

Le développement ainsi obtenu est tout à fait analogue à celui que nous avons donné dans la partie précédente de ce travail (1) (spectres discrets). Pour déterminer les niveaux discrets de H nous avons les équations

$$(34)\qquad \langle l \,|\, IS \,|\, l \rangle = 0\,,$$

qui résultent de (21). Nous avons, comme dans le cas d'un spectre discret pur

$$(35)\qquad E_l = E_l^{(0)} + \langle l \,|\, H_p \,|\, l \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle l \,|\, I\,[K(E_l)I]^n \,|\, l \rangle\,.$$

Les équations (34) sont une conséquence de la relation suivante, lorsque S_d commute avec J

$$(36)\qquad (IS)_d = 0\,, \qquad ([S_d, J] = 0)\,.$$

Il est important de remarquer qu'en général

$$(36a)\qquad \langle E, \theta' \,|\, IS \,|\, E, \theta'' \rangle \neq 0\,.$$

On vérifie facilement que

$$(37)\qquad A_d = \frac{1}{2} \lim_{\tau\to\infty} \left[\exp\,[iJ\tau] A \exp\,[-iJ\tau] + \exp\,[-iJ\tau] A \exp\,[iJ\tau]\right].$$

Puisque

$$(38)\qquad \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\,[iJ\tau][A,\,J]\exp\,[-\,iJ\tau]\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big[\exp\,[iJ\tau]A\exp\,[-\,iJ\tau]\big]\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= A - \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\big[\exp\,[iJ\tau]A\exp\,[-\,iJ\tau] + \exp\,[-\,iJ\tau]A\exp\,[iJ\tau]\big]\,,$$

nous avons

$$(39)\qquad A = A_d + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\,[iJ\tau][A,\,J]\exp\,[-\,iJ\tau]\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Cette formule et l'équation (18) nous donnent une équation intégrale pour S

$$(40)\qquad S = S_d + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\,[iJ\tau]IS\exp\,[-\,iJ\tau]\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

La solution de (40) est

$$(41)\qquad S = \left|1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n\int_{-\infty}^{+\infty}I'(\tau_1)\varepsilon(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1\int_{-\infty}^{+\infty}I'(\tau_2)\varepsilon(\tau_2-\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_2\,\ldots\,\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}I'(\tau_n)\varepsilon(\tau_n-\tau_{n-1})\,\mathrm{d}\tau_n\right|S_d\,,$$

avec

$$(42)\qquad I'(\tau) = \exp\,[iJ\tau]I\exp\,[-\,iJ\tau]\,.$$

En prenant les nouvelles variables d'intégration t_r

$$(43)\qquad t_r = \tau_r - \tau_{r-1}\,, \qquad (\tau_0 = 0)$$

et en tenant compte de l'identité

$$(44)\qquad I'(\tau_n) = \exp\,[iJ\tau_n]I\left[\sum_l P_l^{(0)}\exp\,[-\,iE_l\tau_n] + \int\mathrm{d}EP_E^{(0)}\exp\,[-\,iE\tau_n]\right],$$

on trouve que

$$(45)\qquad S = \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{l}\left\{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i(J - E_l)t\right]\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\,I\right\}^n P_l^{(0)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int \mathrm{d}E\left\{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i(J - E)t\right]\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t\,I\right\}^n P_E^{(0)}\right]\right\} S_d\,,$$

donc

$$(46)\qquad S = \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{l}\{K(E_l)I\}^n P_l^{(0)} + \int \mathrm{d}E\,\{K(E)I\}^n P_E^{(0)}\right]\right\} S_d\,.$$

Ce développement coïncide avec celui que l'on obtient de (32) et (33).

Dans le cas du spectre discret, il suffit de prendre $S_d = 1$ pour avoir un opérateur unitaire. Dans le cas plus général que nous considérons maintenant, il n'en est plus de même. Nous verrons plus tard que l'on peut obtenir un S unitaire en choisissant S_d de façon à satisfaire les conditions qui caractérisent les fonctions d'onde des problèmes de diffusion.

L'opérateur S pour la diffusion.

3. – La fonction d'onde $\psi(t)$, qui décrit le mouvement du système perturbé, satisfait à l'équation de Schrödinger

$$(47)\qquad i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) = H\psi(t)\,, \qquad (\hbar = 1).$$

Nous avons

$$(48)\qquad \psi(t) = V(t - t_0)\psi(t_0)\,, \qquad (V(t) = \exp\left[-iHt\right])$$

l'opérateur $V(t)$ étant déterminé par les équations

$$(49)\qquad i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) = HV(t)\,, \qquad V(0) = 1\,.$$

Nous introduirons maintenant l'opérateur $U(t, t_0)$

$$(50)\qquad U(t, t_0) = \exp\left[iJt\right]V(t - t_0)\exp\left[-iJt_0\right] =$$

$$= \big(\exp\left[iJt\right]\exp\left[-iHt\right]\big)\big(\exp\left[iJt_0\right]\exp\left[-iJt_0\right]\big),$$

$U(t, t_0)$ est déterminé par les équations

$$i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t, t_0) = I'(t) U(t, t_0) , \qquad U(t_0, t_0) = 1 , \tag{51}$$

qui sont équivalentes à l'équation intégrale

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t} I'(\tau) U(\tau, t_0) \, \mathrm{d}\tau . \tag{52}$$

En particulier, nous avons

$$U(t, -\infty) = 1 - i \int_{-\infty}^{t} I'(\tau) U(\tau, -\infty) \, \mathrm{d}\tau . \tag{53}$$

Cette équation est satisfaite en prenant

$$U(t, -\infty) = \exp [iJt] S_+ \exp [-iJt], \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_+ = 0 . \tag{54}$$

S_+ étant la solution de l'équation

$$S_+ = 1 - i \int_{-\infty}^{0} \exp [iJ\tau] I S_+ \exp [-iJ\tau] \, \mathrm{d}\tau . \tag{55}$$

En effet, il résulte de (55) que

$$\exp [iJt] S_+ \exp [-iJt] = 1 - i \int_{-\infty}^{t} \exp [iJ\tau'] I S_+ \exp [-iJ\tau'] \, \mathrm{d}\tau' = \tag{56}$$

$$= 1 - i \int_{-\infty}^{t} I'(\tau') \big(\exp [iJ\tau'] S_+ \exp [-iJ\tau'] \big) \, \mathrm{d}\tau' \qquad (\tau' = \tau + t) .$$

Il résulte de (50) que

$$S_+ = \lim_{t_0 \to -\infty} \{ \exp [-iH(t - t_0)] \exp [iJ(t - t_0)] \} = \tag{57}$$

$$= \lim_{t_0 \to -\infty} \{ \exp [iHt_0] \exp [-iJt_0] \}.$$

En tenant compte de l'identité suivante

$$H \{ \exp [-iH(t - t_0)] \exp [iJ(t - t_0)] \} - \tag{58}$$

$$- \{ \exp [-iH(t - t_0)] \exp [iJ(t - t_0)] \} J =$$

$$= i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \{ \exp [-iH(t - t_0)] \exp [iJ(t - t_0)] \} ,$$

et de (57), nous obtenons

$$HS_+ - S_+J = \lim_{t_0 \to -\infty} i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \{ \exp[-iH(t-t_0)] \exp[iJ(t-t_0)] \} = 0 . \tag{59}$$

S_+ est donc un opérateur S. S_+ est unitaire parce que $U(t, t_0)$ est unitaire

$$S_+ = U(0, -\infty) , \qquad S_+^+ = U(-\infty, 0) = S_+^{-1} . \tag{60}$$

Considérons maintenant l'opérateur S dont la partie diagonale est 1 et représentons le par S_1. L'opérateur $S_1'((t)$

$$S_1'(t) = \exp[iJt] S_1 \exp[-iJt] , \qquad ((S_1)_d = 1), \tag{61}$$

satisfait à l'équation intégrale suivante

$$S_1'(t) = 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) S_1'(\tau) \varepsilon(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau , \tag{62}$$

qui n'est au fond qu'un cas particulier de (40). Dans le cas d'un spectre continu pur, cette équation coïncide avec une équation qui joue un rôle important dans la théorie des collisions de SCHWINGER [7], où elle est introduite d'une façon différente, sans relations avec un traitement stationnaire. $S_1'(t)$ satisfait à la même équation différentielle que $U(t, t_0)$

$$i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_1'(t) = I_1'(t) S_1'(t) . \tag{63}$$

Il y a donc un opérateur constant R, tel que

$$U(t, -\infty) = S_1'(t) R . \tag{64}$$

En particulier nous avons

$$U(-\infty, -\infty) = 1 = S_1'(-\infty) R , \tag{65}$$

donc

$$R = [S_1'(-\infty)]^{-1} = \left[1 + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) S_1'(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right]^{-1} . \tag{66}$$

On voit facilement que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) S_1'(\tau) \, \mathrm{d}\tau = 2\pi \int \mathrm{d}E \, P_E^{(0)} I S_1 P_E^{(0)} . \tag{67}$$

Il résulte de (67) que

$$(68) \qquad [S_1'(-\infty), J] = 0\,, \qquad [R, J] = 0\,.$$

Puisque R commute avec J et

$$(69) \qquad S_+ = S_1 R\,,$$

nous avons une nouvelle preuve que S_+ est une solution de l'équation (18).

Il résulte de (66) que

$$(70) \qquad R = 1 - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau)\,U(\tau, -\infty)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}[1 + U(\infty, -\infty)]\,,$$

la condition initiale pour $S_1'(t)$ est donc

$$(71) \qquad S_1'(-\infty) = 2[1 + U(\infty, -\infty)]^{-1}\,.$$

S_+ est l'opérateur S qui correspond à la diffusion. En effet, considérons la solution $\psi_{E,\theta}(t, t_0)$ de l'équation de Schrödinger

$$(72) \qquad \psi_{E,\theta}(t, t_0) = V(t - t_0)\exp[-iEt_0]\Phi^{(0)}_{E,\theta} = \exp[-iJt]\,U(t, t_0)\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,.$$

Lorsque t_0 tend vers $-\infty$, $\psi_{E,\theta}(t, t_0)$ tend vers une solution stationnaire $\psi_{E,\theta}(t)$

$$(73) \qquad \psi_{E,\theta}(t) = S_+\exp[-iJt]\Phi^{(0)}_{E,\theta} = \exp[-iEt]S_+\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,,$$

$\psi_{E,\theta}(t)$ représentera l'état du système pendant la collision, si $\Phi^{(0)}_{E,\theta}$ représente les particules libres incidentes. L'équation intégrale (55) peut être mise sous la forme

$$(74) \qquad S_+ = 1 - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[iJ\tau]IS_+\exp[-iJ\tau]\,\mathrm{d}\tau + \\ + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[iJ\tau]IS_+\exp[-iJ\tau]\,\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

donc

$$(75) \qquad S_+\Phi^{(0)}_{E,\theta} = \Phi^{(0)}_{E,\theta} - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[i(J - E)\tau]\,\mathrm{d}\tau\, IS_+\Phi^{(0)}_{E,\theta} + \\ + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[i(J - E)\tau]\,\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\, IS_+\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,.$$

En tenant compte de la décomposition spectrale de $\exp[iJ\tau]$, ainsi que de (22), nous obtenons

(76) $$S_+\Phi^{(0)}_{E,\theta} = \Phi^{(0)}_{E,\theta} - [i\pi P^{(0)}_E - K(E)]IS_+\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,.$$

La formule (16) montre que l'opérateur $\delta(J-E)$ existe effectivement, δ étant la fonction symbolique de Dirac

(77) $$P^{(0)}_E = \delta(J-E)\,.$$

D'autre part, il est justifié d'écrire

(78) $$K(E) = \text{v.p.}\,(E-J)^{-1}\,,$$

donc

(79) $$S_+\Phi^{(0)}_{E,\theta} = \Phi^{(0)}_{E,\theta} - [i\pi\delta(J-E) + \text{v.p.}\,(J-E)^{-1}]IS_+\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,.$$

L'équation (79) donne la fonction d'onde perturbée $\Phi_{E,\theta}$ comme somme de la fonction d'onde non perturbée (ondes incidentes) et de celle des ondes diffusées. L'opérateur appliqué à $IS_+\Phi^{(0)}_{E,\theta}$ est une généralisation de celui considéré par DIRAC [14] et HEISENBERG [6] dans la théorie des collisions. Le rapprochement des traitements stationnaire et non stationnaire nous a permis de justifier rigoureusement le choix de cet opérateur, qui caractérise d'une façon générale les ondes divergentes, et qui usuellement est pris par des considérations d'analogie avec le cas de la diffusion d'une particule par un champ de forces.

Nous choisirons en général

(80) $$\Phi_l = S_+\Phi^{(0)}_l\,, \qquad \Phi_{E,\theta} = S_+\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,,$$

et nous introduirons la notation

(81) $$(J-E)^{-1}_{\pm} = \text{v.p.}\,(J-E)^{-1} \pm i\pi\delta(J-E)\,,$$

$(J-E)^{-1}_{+}$ n'est pas l'inverse de $J-E$ puisque

(82) $$(J-E)^{-1}_{+}(J-E) = -K(E)(J-E) \neq 1\,.$$

L'équation (79) peut être écrite sous la forme suivante

(83) $$\Phi_{E,\theta} = \Phi^{(0)}_{E,\theta} - (J-E)^{-1}_{+}I\Phi_{E,\theta}\,.$$

L'équation de Heitler et Peng.

4. – L'équation (83) détermine la fonction d'onde perturbée qui satisfait aux conditions de la diffusion. Dans la théorie quantique de l'amortissement (damping), on utilise une équation intégrale qui se rattache étroitement à (83).

---

(14) P. A. M. DIRAC: *Principles of Quantum Mechanics* (Oxford, 1935).

Cette équation a été donnée, dans des cas particuliers, par plusieurs auteurs ([2,3,4,5]) et, dans le cas général d'un spectre continu, par HEITLER et PENG ([2]). HEITLER et PENG ont utilisé une méthode non stationnaire; nous employerons d'abord la méthode stationnaire d'itération due à GORA ([3]) et perfectionnée par PAULI ([15]), pour obtenir une généralisation de l'équation de HEITLER et PENG et, ensuite, nous montrerons que la méthode d'itération peut être remplacée par un traitement plus simple et direct. Prenons (83) sous la forme suivante

$$\Phi_{E,\theta} = \Phi^{(0)}_{E,\theta} - i\pi P^{(0)}_E I \Phi_{E,\theta} + K(E) I \Phi_{E,\theta}\,, \tag{84}$$

et remplaçons dans le dernier terme de (84) $\Phi_{E,\theta}$ par le second membre de (84)

$$\Phi_{E,\theta} = \{1 + K(E)I\}\, \Phi^{(0)}_{E,\theta} - i\pi \{1 + K(E)I\}\, P^{(0)}_E I \Phi_{E,\theta} + [K(E)I]^2 \Phi_{E,\theta}\,. \tag{85a}$$

En remplaçant dans le dernier terme de (85*a*) $\Phi_{E,\theta}$ par sa valeur (84), nous obtenons

$$\begin{aligned}\Phi_{E,\theta} = \{1 + K(E)I + [K(E)I]^2\}\, \Phi^{(0)}_{E,\theta} - \\ - i\pi \{1 + K(E)I + [K(E)I]^2\}\, P^{(0)}_E I \Phi_{E,\theta} + [K(E)I]^3 \Phi_{E,\theta}\,.\end{aligned} \tag{85b}$$

Pour continuer, on remplacerait dans le dernier terme de (85*b*) $\Phi_{E,\theta}$ par sa valeur (84), et ainsi de suite. Finalement on obtient, si l'itération est convergente

$$\Phi_{E,\theta} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [K(E)I]^n \right\} \Phi^{(0)}_{E,\theta} - i\pi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [K(E)I]^n \right\} P^{(0)}_E I \Phi_{E,\theta}\,, \tag{85}$$

donc

$$I\Phi_{E,\theta} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [IK(E)]^n \right\} I\Phi^{(0)}_{E,\theta} - i\pi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [IK(E)]^n \right\} IP^{(0)}_E I \Phi_{E,\theta}\,. \tag{86}$$

Introduisons maintenant l'opérateur U de Heitler et Peng généralisé

$$U = IS_+ \tag{87}$$

Les éléments de matrice de U entre des états non perturbés de même énergie sont déterminés par l'équation de Heitler et Peng généralisée

$$\begin{aligned}\langle E'', \theta'' \mid U \mid E', \theta' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle E'', \theta'' \mid [IK(E')]^n I \mid E', \theta' \rangle - \\ - i\pi \int \mathrm{d}\theta \sum_{n=0}^{\infty} \langle E'', \theta'' \mid [IK(E')]^n I \mid E', \theta \rangle \langle E', \theta \mid U \mid E', \theta' \rangle\,.\end{aligned} \tag{88}$$

([15]) W. PAULI: *Meson Theory of Nucl. Forces* (New York, 1946).

En réalité, HEITLER et PENG [2] suppriment certains termes dans (88), pour éviter les divergences qui apparaissent quand on veut appliquer (88) à des champs quantiques. Aujourd'hui on emploie plutôt d'autres méthodes pour éliminer les termes infinis.

Les résultats du paragraphe 3 nous permettent de comprendre d'une façon très claire la nature de là transformation de Heitler et Peng. En effet, il résulte des équations (69) et (70) que

$$(89) \qquad U = IS_1 \left[1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\,[iJ\tau]\, U \exp\,[-iJ\tau]\, \mathrm{d}\tau \right],$$

donc

$$(90) \qquad \langle E'', \theta'' \mid U \mid E', \theta' \rangle = \langle E'', \theta'' \mid IS_1 \mid E', \theta' \rangle - \\ - i\pi \int \mathrm{d}\theta\, \langle E'', \theta'' \mid IS_1 \mid E', \theta \rangle \langle E', \theta \mid U \mid E', \theta' \rangle .$$

Le développement (46) des opérateurs S nous donne

$$(91) \qquad \langle E'', \theta'' \mid IS_1 \mid E', \theta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle E'', \theta'' \mid [IK(E')]^n I \mid E', \theta \rangle,$$

donc (90) est essentiellement l'équation de Heitler et Peng. Les considérations précédentes montrent que la méthode d'itération revient à exprimer S_+ au moyen de S_1 et à utiliser le développement (46) de S_1. L'équation (89) peut être considérée comme une forme de l'équation de Heitler et Peng.

L'équation de Heitler et Peng ne contient pas explicitement le temps. Il est possible de la remplacer par une équation équivalente, qui dépend du temps et qui est plus avantageuse dans certains cas. Il résulte de (69), (70), (61) et (54) que $U(t, -\infty)$ satisfait à l'équation suivante, qui se réduit à celle de SCHWINGER [7] dans le cas d'un spectre continu pur

$$(92) \qquad U(t, -\infty) = S_1'(t) \left[1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau)\, U(\tau, -\infty)\, \mathrm{d}\tau \right].$$

Introduisons l'opérateur $U'(t)$

$$(93) \qquad U'(t) = \exp\,[iJt]\, U \exp\,[-iJt] = I'(t)\, U(t, -\infty)\,,$$

$U'(t)$ satisfait à l'équation suivante

$$(94) \qquad U'(t) = I'(t) S'(\tau) \left[1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} U'(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right],$$

qui est équivalente à (89). Pour $S_1'(t)$ nous pouvons employer le développement suivant

$$S_1'(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau_1)\varepsilon(t-\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1 \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau_2)\varepsilon(\tau_1-\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau_n)\varepsilon(\tau_{n-1}-\tau_n)\,\mathrm{d}\tau_n\,, \tag{95}$$

qui est une conséquence de (41). L'équation que l'on obtient de (92), en remplaçant $S_1'(t)$ par son développement (95), peut aussi être considérée comme une forme non stationnaire de l'équation de Heitler et Peng. Il est intéressant de remarquer que (92) n'est qu'un cas particulier de l'équation plus générale

$$U(t, t_0) = S_1'(t)\left[1 + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau)\,U(\tau, t_0)\varepsilon(t_0-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]. \tag{96}$$

Pour obtenir (96) il suffit de remarquer que (52) nous donne

$$U(t, t_0) = \left[1 + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau)\,U(\tau, t_0)\varepsilon(t_0-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] -$$
$$-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau)\,U(\tau, t_0)\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{97}$$

5. – Pour nous rendre bien compte de la signification de l'équation de Heitler et Peng, nous discuterons maintenant la signification physique de l'opérateur S_1. Considérons l'opérateur S_- défini par l'équation suivante

$$U(t, \infty) = \exp\,[iJt]S_-\exp\,[-iJt]\,. \tag{98}$$

Il résulte de (96) que

$$S_- = \frac{1}{2}\,S_1[1 + U(-\infty, \infty)] = S_1R^+\,. \tag{99}$$

On vérifie facilement que

$$S_-\Phi^{(0)}_{E,\theta} = \Phi^{(0)}_{E,\theta} - [\text{v.p.}\,(J-E)^{-1} - i\pi\delta(J-E)]IS_-\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,. \tag{100}$$

Lorsque $\Phi^{(0)}_{E,\theta}$ représente des particules libres (ondes planes), la fonction d'onde perturbée est formée par la superposition d'ondes planes et d'ondes convergentes. Nous obtenons de (69) et (99)

$$S_+ + S_- = S_1(R + R^+) = \frac{1}{2}\,S_1[2 + U(\infty, -\infty) + U(-\infty, \infty)]\,. \tag{101}$$

En tenant compte de la relation suivante

$$(S_+^+ + S_-^+)(S_+ + S_-) = 2 + S_+^+ S_- + S_-^+ S_+ = \tag{102}$$

$$= 2 + U(-\infty, 0)\,U(0, \infty) + U(\infty, 0)\,U(0, -\infty) =$$

$$= 2 + U(-\infty, \infty) + U(\infty, -\infty)\,,$$

nous obtenons l'expression de S_1 en termes de S_+ et S_-

$$(S_+ + S_-)[(S_+ + S_-)^+(S_+ + S_-)]^{-1} = \frac{1}{2}\,S_1\,, \tag{103}$$

c'est à dire que

$$(S_1^{-1})^+ = \frac{1}{2}\,(S_+ + S_-)\,. \tag{104}$$

La fonction propre perturbée $(S_1^{-1})^+\Phi_{E,\theta}^{(0)}$ satisfait à l'équation suivante

$$(S_1^{-1})^+\Phi_{E,\theta}^{(0)} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - \frac{1}{2}\,[(J-E)_+^{-1} I S_+ + (J-E)_-^{-1} I S_-]\Phi_{E,\theta}^{(0)}\,. \tag{105}$$

Lorsque $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$ représente des ondes planes, $(S_-^{-1})^+\Phi_{E,\theta}^{(0)}$ est formée par la superposition des ondes planes $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$ et des ondes divergentes $(1/2)(J-E)_+^{-1} I S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)}$ et convergentes correspondantes $(1/2)(J-E)_-^{-1} I S_- \Phi_{E,\theta}^{(0)}$. Il résulte des considérations précédentes que c'est $(S_1^{-1})^+$, plutôt que S_1, qui a une signification physique simple.

À chaque opérateur S, admettant un inverse S^{-1}, correspond un opérateur unitaire S'

$$S' = S(S^+S)^{-1/2} = (SS^+)^{-1/2}S\,; \tag{106}$$

S' est une solution de l'équation (18), parce que S^+S commute avec J et SS^+ commute avec H

$$(S^+S)J = S^+HS = J(S^+S)\,, \qquad H(SS^+) = SJS^+ = (SS^+)H\,. \tag{107}$$

En tenant compte des relations suivantes

$$S_+ = \frac{1}{2}\,S_1(1 + \exp[i\eta])\,, \qquad S_- = \frac{1}{2}\,S_1(1 + \exp[-i\eta]), \tag{108}$$

$$\exp[i\eta] = U(\infty, -\infty)\,,$$

nous obtenons

$$S_1' = S_1 \cos\frac{1}{2}\,\eta\,, \qquad S_1^{-1})^+ = 2S_1\cos^2\frac{1}{2}\,\eta\,. \tag{109}$$

S_1 a la propriété fondamentale d'avoir des éléments de matrice nuls entre des états non perturbés différents de même énergie. En conséquence de cela, la fonction perturbée $S_1\Phi^{(0)}_{E,\theta}$ est une combinaison linéaire de $\Phi^{(0)}_{E,\theta}$ et de fonctions propres non perturbées $\Phi^{(0)}_{E',\theta'}$, $(E' \neq E)$. L'opérateur unitaire S'_1 n'a plus ces propriétés, parce que η ne commute pas avec les opérateurs θ_{op} de la représentation $(H_0, \theta_{\mathrm{op}})$.

La méthode d'approximation de Born.

6. – Les résultats des paragraphes précédents nous permettent de formuler d'une façon très générale la méthode d'approximation de Born [16], et ils se prêtent bien à la discussion de ses rapports avec la théorie quantique du damping. La fonction d'onde qui décrit la diffusion est une solution de l'équation

$$(J - E)\Phi_{E,\theta} = - I\Phi_{E,\theta}\,, \tag{110}$$

qui doit satisfaire aux conditions de la diffusion. Dans la méthode de Born on cherche un développement pour $\Phi_{E,\theta}$

$$\Phi_{E,\theta} = \Phi^{(0)}_{E,\theta} + \sum_{n=1}^{\infty}\Phi^{(n)}_{E,\theta}\,. \tag{111}$$

Les $\Phi^{(n)}_{E,\theta}$ sont déterminées par les équations

$$(J - E)\Phi^{(n)}_{E,\theta} = - I\Phi^{(n-1)}_{E,\theta}\,, \qquad (n \geqslant 1) \tag{112}$$

et la condition que les $\Phi^{(n)}_{E,\theta}$, pour $n \geqslant 1$, représentent des ondes diffusées. Nous avons démontré que, pour avoir des ondes diffusées (divergentes), il faut prendre

$$\Phi^{(n)}_{E,\theta} = -(J - E)^{-1}_{+} I\Phi^{(n-1)}_{E,\theta}\,, \qquad (n \geqslant 1) \tag{113}$$

donc

$$\Phi^{(n)}_{E,\theta} = (-1)^n[(J - E)^{-1}_{+} I]^n\Phi_{E,\theta}\,. \tag{114}$$

D'autre part, nous obtenons de (110) et de la condition pour la diffusion

$$\Phi_{E,\theta} = \Phi^{(0)}_{E,\theta} - (J - E)^{-1}_{+} I\Phi_{E,\theta}\,. \tag{115}$$

La solution de cette équation est

$$\Phi_{E,\theta} = [1 + (J - E)^{-1}_{+} I]^{-1}\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,. \tag{116}$$

---

[16] M. Born: *Zeits. f. Phys.*, **38**, 803 (1926).

En introduisant dans (116) le développement de Liouville-Neumann suivant

$$[1 + (J - E)_+^{-1} I]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [(J - E)_+^{-1} I]^n , \tag{117}$$

nous retrouvons le développement de Born (111)-(114). La méthode de Born utilise le développement de Liouville-Neumann de $[1 - K(E)I + i\pi P_E^{(0)} I]^{-1}$, tandis que dans la théorie quantique du damping on utilise le développement de Liouville-Neumann de l'opérateur $[1 - K(E)I]^{-1}$ et après cela on résout l'équation de Heitler et Peng. Même quand la perturbation est assez petite, les opérateurs $K(E)I$ et $P_E^{(0)}I$ ne sont pas necessairement petits, parce que $K(E)$ a un spectre qui n'est pas borné en valeur absolue et

$$P_E^{(0)} \Phi_{E',\theta'}^{(0)} = \delta(E - E') \Phi_{E',\theta'}^{(0)} . \tag{118}$$

En général les développements de Liouville-Neumann (33) et (117) ne seront pas convergents, mais la situation est plus défavorable dans le cas de (117), à cause de (118).

La méthode de Born se rattache à un développement de S_+ analogue à celui de S_1 obtenu de (46). Il résulte de (55) que

$$\left\{ \begin{aligned} S_+ P_l^{(0)} &= P_l^{(0)} + K(E_l) I S_+ P_l^{(0)} , \\ S_+ P_E^{(0)} &= P_E^{(0)} + K(E) I S_+ P_E^{(0)} - i\pi P_E^{(0)} I S_+ P_E^{(0)} , \end{aligned} \right. \tag{119}$$

nous avons donc

$$\left\{ \begin{aligned} S_+ P_l^{(0)} &= [1 - K(E_l) I]^{-1} P_l^{(0)} , \\ S_+ P_E^{(0)} &= [1 - K(E) I + i\pi P_E^{(0)} I]^{-1} P_E^{(0)} , \end{aligned} \right. \tag{120}$$

$$S_+ = \sum [1 - K(E_l) I]^{-1} P_l^{(0)} + \int [1 + (J - E)_+^{-1} I]^{-1} P_E^{(0)} \mathrm{d}E . \tag{121}$$

Il est intéressant de remarquer que le développement (121) est une conséquence de la série de Peano pour $U(t, t_0)$

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^{t} I'(\tau_1)\, \mathrm{d}\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} I'(\tau_2)\, \mathrm{d}\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} I'(\tau_n)\, \mathrm{d}\tau_n . \tag{122}$$

En prenant comme variables d'intégration les $t_r = \tau_r - \tau_{r-1}$ $(\tau_0 = 0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} U(0, -\infty) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{0} \exp[iJt_1] I\, \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{0} \exp[iJt_2] I\, \mathrm{d}t_2 \ldots \times \\ \times \int_{-\infty}^{0} \exp[iJt_n] I \exp[-iJ\tau_n]\, \mathrm{d}t_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \times \\ \times \int_{-\infty}^{0} \exp[iJt_1] I\, \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{0} \exp[iJt_2] I\, \mathrm{d}t_2 \ldots \int_{-\infty}^{0} \exp[iJt_n] I \exp[-iJ \sum_{r=1}^{n} t_r]\, \mathrm{d}t_n. \end{aligned} \tag{123}$$

En remplaçant dans (123) $\exp[-iJ\sum_r t_r]$ par sa décomposition spectrale, cette équation dévient

$$(124)\qquad U(0,-\infty) = 1 + \sum_l \sum_{n=1}^{\infty} \left[-i\int_{-\infty}^{0} \exp[i(J-E_l)\tau]\,\mathrm{d}\tau I\right]^n P_l^{(0)} + \int \mathrm{d}E \sum_{n=1}^{\infty}\left[-i\int_{-\infty}^{0}\exp[i(J-E)\tau]\,\mathrm{d}\tau I\right]^n P_E^{(0)}\,.$$

En tenant compte des relations suivantes

$$(125)\qquad \begin{cases} -i\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\exp[i(J-E_l)\tau]\,\mathrm{d}\tau = K(E_l)\,, \\ -i\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\exp[i(J-E)\tau]\,\mathrm{d}\tau = K(E) - i\pi P_E^{(0)}\,, \end{cases}$$

et des développements de Liouville-Neumann de $[1-K(E_l)I]^{-1}$ et de $[1-K(E)I+i\pi P_E^{(0)}I]^{-1}$ nous obtenons (121).

La formule (121) nous permet d'obtenir la relation suivante entre S_+ et S_1

$$(126)\qquad S_+ = \sum_l S_1 P_l^{(0)} + \int [1+i\pi S_1 P_E^{(0)} I]^{-1} S_1 P_E^{(0)}\,\mathrm{d}E\,.$$

Il résulte de (126) que

$$(127)\qquad \Phi_{E,\theta} = [1+i\pi S_1 P_E^{(0)} I]^{-1} S_1 \Phi_{E,\theta}^{(0)}\,.$$

Cette équation nous donne la relation entre la fonction propre perturbée de la diffusion $\Phi_{E,\theta}$ et celle donnée par la méthode de perturbation de Schrödinger $S_1\Phi_{E,\theta}^{(0)}$. L'opérateur appliqué à $S_1\Phi_{E,\theta}^{(0)}$ fait la correction d'amortissement (damping). Pour démontrer (126) il suffit de tenir compte des équations

$$(128)\qquad S_1 P_l^{(0)} = [1-K(E_l)I]^{-1}P_l^{(0)}\,,\qquad S_1 P_E^{(0)} = [1-K(E)I]^{-1}P_E^{(0)}\,;$$

$$(129)\qquad [1+i\pi S_1 P_E^{(0)} I]^{-1} S_1 P_E^{(0)} = [1+i\pi[1-K(E)I]^{-1}P_E^{(0)}I]^{-1}[1-K(E)I]^{-1}P_E^{(0)} = [1-K(E)I+i\pi P_E^{(0)}I]^{-1}P_E^{(0)} = [1+(J-E)_+^{-1}I]^{-1}P_E^{(0)}\,.$$

Deuxième Partie

PERTURBATIONS DE SYSTÈMES A SELF-ENERGY

7. – Dans les considérations des sections précédentes nous avons toujours admis que chaque fonction propre perturbée $\Phi_{E,\theta}$ correspondait à une fonction propre non perturbée $\Phi^{(0)}_{E,\theta}$ de même énergie. Il est possible d'établir une théorie plus générale, dans laquelle à $\Phi^{(0)}_{E,\theta}$ correspond une fonction propre perturbée d'énergie $\bar{E}_\theta$

$$\bar{E}_\theta = F(E, \theta, \lambda) , \tag{130}$$

la fonction F satisfaisant à la condition suivante

$$\lim_{\lambda \to 0} F(E, \theta, \lambda) = E . \tag{131}$$

La différence $\bar{E}_\theta - E$ peut être considérée comme la self-energy de l'état perturbé, lorsque le système est constitué par des champs en interaction.

Nous introduirons l'opérateur de projection $\bar{P}^{(0)}_{\bar{E}}$ sur la variété des fonctions propres de H_0 auxquelles correspondent des fonctions perturbées d'énergie $\bar{E}$

$$\bar{P}^{(0)}_{\bar{E}} = \int P^{(0)}_{E,\theta} \delta(\bar{E} - F(E, \theta, \lambda))\, \mathrm{d}E\, \mathrm{d}\theta . \tag{132}$$

On établit facilement les relations suivantes

$$\int \bar{P}^{(0)}_{\bar{E}}\, \mathrm{d}\bar{E} = \int P^{(0)}_{E}\, \mathrm{d}E , \qquad \bar{P}^{(0)}_{\bar{E}} \bar{P}^{(0)}_{\bar{E}'} = \delta(\bar{E} - \bar{E}')\, \bar{P}^{(0)}_{\bar{E}} . \tag{133}$$

Nous remplacerons maintenant l'équation (18) par la suivante

$$H\bar{S} = \bar{S}\bar{J} , \tag{134}$$

avec

$$\bar{J} = \sum_l E_l P^{(0)}_l + \int \bar{E} \bar{P}^{(0)}_{\bar{E}}\, \mathrm{d}\bar{E} = \sum_l E_l P^{(0)}_l + \int \bar{E}_\theta P^{(0)}_{E,\theta}\, \mathrm{d}E\, \mathrm{d}\theta , \tag{135}$$

et la décomposition (6) par la suivante

$$H = \bar{J} + \bar{I} . \tag{136}$$

Dans le cas d'un spectre continu pur, nous avons

$$J = H_0 , \qquad \bar{J} = F(H_0, \theta_{\mathrm{op}}, \lambda) , \tag{137}$$

les θ_{op} étant les opérateurs qui forment avec H_0 le système complet d'opérateurs commutables dont les fonctions propres communes sont les $\Phi^{(0)}_{E,\theta}$. Il est évident que le choix de la fonction F est arbitraire, dans une large mesure. Il suffit que le spectre de $\bar{J}$ coïncide avec celui de H. Nous pouvons traiter (134) comme nous l'avons fait avec (18). La formule (29) est remplacée par la suivante

$$(138) \qquad \bar{S} = \sum_l [1 - \bar{K}(E_l)\bar{I}]^{-1} P_l^{(0)} \bar{S} P_l^{(0)} + \\ + \lim_{\tau\to\infty} \int \mathrm{d}\bar{E}[1 - \bar{K}(\bar{E})\bar{I}]^{-1} \cos[(\bar{J} - \bar{E})\tau] \bar{S} \bar{P}^{(0)}_{\bar{E}} ,$$

avec

$$(139) \qquad \bar{K}(u) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\bar{J} - u)\tau] \varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau .$$

Il faut introduire une nouvelle définition de la partie diagonale A_0 d'un opérateur A

$$(140) \qquad A_D = \sum_{l'} P_{l'}^{(0)} A P_{l'}^{(0)} + \lim_{\tau\to\infty} \int \cos[(\bar{J} - \bar{E}')\tau] A \bar{P}^{(0)}_{\bar{E}'} \mathrm{d}\bar{E}' .$$

La formule qui correspond à (32) est

$$(141) \qquad \bar{S} = \left\{ \sum_l [1 - \bar{K}(E_l)\bar{I}]^{-1} P_l^{(0)} + \int \mathrm{d}\bar{E}[1 - \bar{K}(\bar{E})\bar{I}]^{-1} \bar{P}^{(0)}_{\bar{E}} \right\} \bar{S}_D .$$

Il y a un opérateur $\bar{S}_1$ analogue à S_1

$$(142) \qquad (\bar{S}_1)_D = 1 ,$$

qui satisfait à l'équation intégrale

$$(143) \qquad \bar{S}_1 = 1 + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\bar{J}\tau] \bar{I} \bar{S}_1 \exp[-i\bar{J}\tau]\, \varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau .$$

Les valeurs propres discretes de H sont déterminées par des équations analogues à (34)

$$(144) \qquad \langle l \,|\, \bar{I}\bar{S}_1 \,|\, l \rangle = 0 .$$

Ces équations résultent de la relation analogue à (36)

$$(145) \qquad (\bar{I}\bar{S}_1)_D = 0 .$$

Nous obtenons de (144) le développement

$$E_l = E_l^{(0)} + \langle l \mid H_p \mid l \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle l \mid \bar{I}[\bar{K}(E_l)\bar{I}]^n \mid l \rangle \, . \tag{146}$$

De (145) nous obtenons aussi la relation suivante

$$\lim_{\tau \to \infty} \cos\,[\bar{E}_\theta - \bar{E}'_{\theta'})\tau]\,\langle E,\,\theta \mid \bar{I}\bar{S}_1 \mid E',\,\theta' \rangle = 0\,, \tag{147}$$

qui nous donne

$$\begin{aligned}\bar{E}_\theta = E + \lim_{\tau \to \infty} \int \cos\,[(\bar{E}_\theta - \bar{E}'_{\theta'})\tau]\,\langle E,\,\theta \mid H_p \mid E',\,\theta' \rangle\,\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}\theta' \,+ \\ + \lim_{\tau \to \infty} \int \cos\,[(\bar{E}_\theta - \bar{E}'_{\theta'})\tau] \sum_{n=1}^{\infty} \langle E,\,\theta \mid \bar{I}[\bar{K}(\bar{E}'_{\theta'})\bar{I}]^n \mid E',\,\theta' \rangle\,\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}\theta' \, .\end{aligned} \tag{148}$$

Cette relation doit être considérée comme une identité, puisque les $\bar{E}_\theta$ peuvent être choisis d'une façon largement arbitraire. Il est intéressant de remarquer qu'il y a une identité correspondante dans la méthode de la première partie de ce travail, cas particulier de (148)

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \to \infty} \int \cos\,[(E - E')\tau] \Big\{ \langle E,\,\theta \mid H_p \mid E',\,\theta' \rangle \,+ \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \langle E,\,\theta \mid I[K(E')I]^n \mid E',\,\theta' \rangle \Big\}\,\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}\theta' = 0\,.\end{aligned} \tag{149}$$

Les considérations précédentes montrent que, pour définir de façon univoque les self-énergies, il faut ajouter quelque condition restrictive à la théorie des perturbations, dans le cas de spectres continus.

8. – Dans le traitement dynamique du cas des champs, nous remplacerons $U(t,\,t_0)$ par l'opérateur $\bar{U}(t,\,t_0)$

$$\bar{U}(t,\,t_0) = \exp\,[i\bar{J}t]\,V(t - t_0)\,\exp\,[-\,i\bar{J}t_0]\,, \tag{150}$$

qui satisfait aux équations suivantes

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\bar{U}(t,\,t_0) = \bar{I}'(t)\bar{U}(t,\,t_0)\,,\quad \bar{U}(t_0,\,t_0) = 1\,,\quad (\bar{I}'(t) = \exp\,[i\bar{J}t]\bar{I}\,\exp\,[-\,i\bar{J}t])\,, \tag{151}$$

$$\bar{U}(t,\,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} \bar{I}'(\tau)\bar{U}(\tau,\,t_0)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{152}$$

Au moyen de $\bar{U}(t, -\infty)$ nous pouvons définir $\bar{S}_+$

$$\bar{U}(t, -\infty) = \exp[i\bar{J}t]\bar{S}_+ \exp[-i\bar{J}t], \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{S}_+ = 0 \; ; \tag{153}$$

$\bar{S}_+$ est la solution de l'équation intégrale

$$\bar{S}_+ = 1 - i\int_{-\infty}^{0} \exp[i\bar{J}\tau]\bar{I}\bar{S}_+ \exp[-i\bar{J}\tau]\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{154}$$

$\bar{S}_+$ est l'opérateur $\bar{S}$ de la diffusion. $\bar{S}_+\Phi^{(0)}_{E,\theta}$ est une fonction propre de H correspondant à la valeur propre $\bar{E}_\theta$. Nous avons

$$\bar{S}_+\Phi^{(0)}_{E,\theta} = \Phi^{(0)}_{E,\theta} - [i\pi\delta(\bar{J} - \bar{E}_\theta) + \text{v.p.}\,(\bar{J} - \bar{E}_\theta)^{-1}]\bar{I}\bar{S}_+\Phi^{(0)}_{E,\theta}\,, \tag{155}$$

avec

$$\text{v.p.}\,(\bar{J} - \bar{E}_\theta)^{-1} = \bar{K}(\bar{E}_\theta)\,. \tag{156}$$

Il y a un opérateur $\bar{S}'_1(t)$ analogue à $S'_1(t)$

$$\bar{S}'_1(t) = \exp[i\bar{J}t]\bar{S}_1 \exp[-i\bar{J}t]\,, \tag{157}$$

$\bar{S}'_1(t)$ est la solution de l'équation intégrale

$$\bar{S}'_1(t) = 1 - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}'_1(\tau)\bar{S}'_1(\tau)\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{158}$$

Nous avons une relation analogue à (92)

$$\bar{U}(t, -\infty) = \bar{S}'_1(t)\left[1 - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}'(\tau)\,\bar{U}(\tau, -\infty)\,\mathrm{d}\tau\right], \tag{159}$$

c'est à dire que

$$\bar{U}(t, -\infty) = \frac{1}{2}\,\bar{S}'_1(t)[1 + \bar{U}(\infty, -\infty)]\,. \tag{160}$$

On vérifie facilement que

$$\bar{U}(\infty, -\infty) = 1 - i\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\bar{J}\tau]\bar{I}\bar{S}_+ \exp[-i\bar{J}\tau]\,\mathrm{d}\tau = \tag{161}$$

$$= 1 - 2\pi i\int \mathrm{d}\bar{E}^{(0)}_{\underline{E}}\;\bar{P}^{(0)}_{\underline{E}}\bar{I}\bar{S}_+\bar{P}^{(0)}_{\underline{E}}$$

$\bar{U}(\infty, -\infty)$ est une généralisation de l'opérateur de collision de Heisen-

BERG ([6]) (matrice caractéristique), qui coïncide avec $U(\infty, -\infty)$ dans le cas d'un spectre continu pur. Nous avons

$$[\overline{U}(\infty, -\infty), \bar{J}] = 0 \,. \tag{162}$$

Tandis que $U(\infty, -\infty)$ commute avec J, $\overline{U}(\infty, -\infty)$ commute avec $\bar{J}$, mais ne commute pas en général avec J. La couche des états qui interviennent dans la diffusion est caractérisée par une valeur de l'énergie observable $\overline{E}$ et non plus par une valeur de E, comme dans les problèmes ordinaires de collision. Cela correspond à l'emploi des masses observables, qui incluent déjà les corrections radiatives (self-energies). La modification de la couche apparait clairement dans la forme différente de l'équation du damping, qui n'est plus celle de HEITLER et PENG. En effet, nous devons remplacer l'opérateur de Heitler et Peng U par $\overline{U}$

$$\overline{U} = \bar{I}\bar{S} \,, \tag{163}$$

et l'équation (89) par la suivante

$$\overline{U} = \bar{I}\bar{S}_1 \left[1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\,[i\bar{J}\tau]\overline{U} \exp\,[-i\bar{J}\tau]\,\mathrm{d}\tau\right] , \tag{164}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \langle E''\,\theta''\,|\,\overline{U}\,|\,E',\theta'\rangle &= \langle E'',\theta''\,|\,\bar{I}\bar{S}_1\,|\,E',\theta'\rangle - \\ &- i\pi \int \mathrm{d}E\,\mathrm{d}\theta\,\langle E'',\theta''\,|\,\bar{I}\bar{S}_1\,|\,E,\theta\rangle\,\delta(\overline{E}_\theta - \overline{E}'_{\theta'})\langle E,\theta\,|\,\overline{U}\,|\,E',\theta'\rangle \,. \end{aligned} \tag{165}$$

Cette équation est essentiellement différente de l'équation donnée par HEITLER et MA ([9]) pour tenir compte des corrections radiatives des masses.

Élimination des termes séculaires dans la série de Peano pour $V(t)$.

9. – Nous avons montré, dans la partie déjà publiée de ce travail ([1]), qu'on pouvait négliger tous les termes séculaires dans la série de Peano pour $U(t, t_0)$, dans le cas de spectres discrets. Nous étendrons maintenant ce résultat au cas de systèmes à spectres continus, en remplaçant $U(t, t_0)$ par $\overline{U}(t, t_0)$ pour avoir un résultat plus général.

La série de Peano pour $\overline{U}(t, t_0)$ est

$$\overline{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n(t, t_0) \,, \tag{166}$$

avec

$$\overline{U}_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^{t} \overline{I}'(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} \overline{I}'(\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} \overline{I}'(\tau_n)\,\mathrm{d}\tau_n\,, \tag{167}$$

donc

$$V(t) = \exp[-i\bar{J}t] + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\,, \qquad V_n(t) = \exp[-i\bar{J}t]\,\overline{U}_n(t, 0)\,. \tag{168}$$

Nous considérerons maintenant, pour simplifier, le cas d'un spectre continu pur. Il résulte de (168) et (167) que

$$\begin{aligned} V_n(t) = \int & \mathrm{d}E_0\,\mathrm{d}\theta_0\,\mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}E_n\,\mathrm{d}\theta_n\, P^{(0)}_{E_0,\theta_0;\,E_n,\theta_n} \times \\ & \times \langle E_0, \theta_0 \,|\, \bar{I} \,|\, E_1, \theta_1\rangle \langle E_1, \theta_1 \,|\, \bar{I} \,|\, E_2, \theta_2\rangle \ldots \langle E_{n-1}, \theta_{n-1} \,|\, \bar{I} \,|\, E_n, \theta_n\rangle \times \\ & \times \left[\frac{\exp[-i\overline{E}_{1,\theta_1}t] - \exp[-i\overline{E}_{0,\theta_0}t]}{(\overline{E}_{1,\theta_1} - \overline{E}_{0,\theta_0})(\overline{E}_{1,\theta_1} - \overline{E}_{2,\theta_2}) \ldots (\overline{E}_{1,\theta_1} - \overline{E}_{n,\theta_n})} + \ldots + \right. \\ & \left. + \frac{\exp[-i\overline{E}_{n,\theta_n}t] - \exp[-i\overline{E}_{0,\theta_0}t]}{(\overline{E}_{n,\theta_n} - \overline{E}_{0,\theta_0})(\overline{E}_{n\theta,n} - \overline{E}_{1,\theta_1}) \ldots (\overline{E}_{n,\theta_n} - \overline{E}_{n-1,\theta_{n-1}})}\right]. \end{aligned} \tag{169}$$

Les dénominateurs que s'annullent donnent lieu à des termes séculaires. On démontre, comme dans le cas du spectre discret, que l'on a un terme en t^p lorsque $E_{0,\theta_0} = \overline{E}_{r_\alpha,\theta_{r_\alpha}}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, p)$

$$\begin{aligned} \left\{\sum_{\alpha=1}^{p} \left[\prod_{\varrho_\alpha \neq r_\alpha} (\overline{E}_{r_\alpha,\theta_{r_\alpha}} - \overline{E}_{\varrho_\alpha,\theta_{\varrho_\alpha}})\right]^{-1} (\exp[i(\overline{E}_{0,\theta_0} - \overline{E}_{r_\alpha,\theta_{r_\alpha}})t] - 1)\right\}_{(\overline{E}_{r_{\alpha'},\theta_{r_{\alpha'}}} = \overline{E}_{0,\theta_0})} = \\ = \frac{(-it)^p}{p!}\left[\prod_{\varrho \neq 0, r_{\alpha'}} (\overline{E}_{0,\theta_0} - \overline{E}_{\varrho,\theta_\varrho})\right]^{-1} \qquad (\alpha' = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \tag{170}$$

L'autre type de terme séculaire de (169) correspond à $\overline{E}_{r_\alpha,\theta_{r_\alpha}} = \overline{E}_{r,\theta_r} \neq \overline{E}_{0,\theta_0}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, p+1)$

$$\begin{aligned} \left\{\sum_{\alpha=1}^{p+1} \left[\prod_{\varrho_\alpha \neq r_\alpha} (\overline{E}_{r_\alpha,\theta_{r_\alpha}} - \overline{E}_{\varrho_\alpha,\theta_{\varrho_\alpha}})\right]^{-1} (\exp[i(\overline{E}_{0,\theta_0} - \overline{E}_{r_\alpha,\theta_{r_\alpha}})t] - 1\right\}_{(\overline{E}_{r_{\alpha'},\theta_{r_{\alpha'}}} = \overline{E}_{r,\theta_r})} = \\ = \frac{(-it)^p}{p!}\exp[i(\overline{E}_{0,\theta_0} - \overline{E}_{r,\theta_r})t]\left[\prod_{\varrho \neq r_{\alpha'}} (\overline{E}_{r,\theta_r} - \overline{E}_{\varrho,\theta_\varrho})\right]^{-1} \\ (\alpha' = 1, 2, \ldots, p+1). \end{aligned} \tag{171}$$

Les termes séculaires du type (171) ne donnent pas de contribution en (169).

Ceux du type (170) ne peuvent être importants que pour n égal à un des r_a. Nous verrons qu'il est possible de se débarrasser de ces termes séculaires, en faisant la somme de contributions provenant d'approximations différentes et en tenant compte de la relation (145)

$$(\bar{I}\bar{S}_1)_D = 0\,,$$

qui peut être mise sous la forme suivante

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int \mathrm{d}\bar{E}\,\mathrm{d}\bar{E}'\cos[(\bar{E}-\bar{E}')\tau]\,\bar{P}^{(0)}_{\bar{E}}\{\bar{I}[\bar{K}(\bar{E}')\bar{I}]^n\}\bar{P}^{(0)}_{\bar{E}'} = 0\,, \tag{172}$$

en y introduissant le développement (141). Il résulte de la definition (139) de $\bar{K}$ que

$$\bar{I}[\bar{K}(\bar{E})\bar{I}]^n = \text{v.p.}\int P^{(0)}_{E_0,\theta_0;\,E',\theta'}\,\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}E_0\,\mathrm{d}\theta_0\,\ldots\,\mathrm{d}E_n\,\mathrm{d}\theta_n\,\times \tag{173}$$
$$\times\frac{\langle E_0,\theta_0\,|\,\bar{I}\,|\,E_1,\theta_1\rangle\langle E_1,\theta_1\,|\,\bar{I}\,|\,E_2,\theta_2\rangle\ldots\langle E_n,\theta_n\,|\,\bar{I}\,|E',\theta'\rangle}{(\bar{E}-\bar{E}_{1,\theta_1})(\bar{E}-\bar{E}_{2,\theta_2})\ldots(\bar{E}-\bar{E}_{n,\theta_n})}\,,$$

dans le cas d'un spectre continu pur. Nous obtenons de (172) et (173) la relation

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\text{v.p.}\int \mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}\theta_1\ldots\mathrm{d}E_n\,\mathrm{d}\theta_n\cos[(\bar{E}_\theta-\bar{E}_{0,\theta_0})\tau]\,\times \tag{174}$$
$$\times\frac{\langle E_0,\theta_0\,|\,\bar{I}\,|\,E_1,\theta_1\rangle\langle E_1,\theta_1\,|\,\bar{I}\,|\,E_2,\theta_2\rangle\ldots\langle E_n,\theta_n\,|\,\bar{I}\,|\,E,\theta\rangle}{(\bar{E}_\theta-\bar{E}_{1,\theta_1})(\bar{E}_\theta-\bar{E}_{2,\theta_2})\ldots(\bar{E}_\theta-\bar{E}_{n,\theta_n})} = 0\,.$$

Nous avons vu que des termes séculaires ne peuvent éxister que dans les éléments de matrice diagonaux de $V_n(t)$, il nous suffit donc d'éxaminer la partie diagonale $V_n(t)_D$

$$V_n(t)_D = \lim_{\tau\to\infty}\int \mathrm{d}E_0\,\mathrm{d}\theta_0\,\mathrm{d}E_1\,\mathrm{d}\theta_1\ldots\mathrm{d}E_n\,\mathrm{d}\theta_n\cos[(\bar{E}_{0,\theta_0}-\bar{E}_{n,\theta_n})\tau]\,\times \tag{175}$$
$$\times P^{(0)}_{E_0,\theta_0;\,E_n\theta_n}\langle E_0,\theta_0\,|\,\bar{I}\,|\,E_{1,\theta_1}\rangle\ldots\langle E_{n-1},\theta_{n-1}\,|\,\bar{I}\,|\,E_n,\theta_n\rangle\,\times$$
$$\times\Bigg[\frac{\exp[-i\bar{E}_{1,\theta_1}t]-\exp[-i\bar{E}_{0,\theta_0}t]}{(\bar{E}_{1,\theta_1}-\bar{E}_{0,\theta_0})\ldots(\bar{E}_{1,\theta_1}-\bar{E}_{n,\theta_n})}+\ldots+$$
$$+\frac{\exp[-i\bar{E}_{n,\theta_n}t]-\exp[-i\bar{E}_{0,\theta_0}t]}{(\bar{E}_{n,\theta_n}-\bar{E}_{0,\theta_0})\ldots(\bar{E}_{n,\theta_n}-\bar{E}_{n-1,\theta_{n-1}})}\Bigg]\,.$$

Le terme, sous l'intégrale en (175), qui correspond à (170) est $C_n(t)$

$$(176)\qquad C_n(t) = \lim_{\tau\to\infty} \cos\,[(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{n,\theta_n})\tau] P^{(0)}_{E_0,\theta_0 : E_n,\theta_n} \times$$

$$\times \left[\prod_{\varrho \neq 0, r_{\alpha'}} (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{\varrho,\theta_\varrho})\right]^{-1} \frac{(-it)^p}{p!} \times$$

$$\times \langle E_0, \theta_0 \,|\, \bar{I} \,|\, E_1, \theta_1\rangle \dots \langle E_{r_1}, \theta_{r_1} \,|\, \bar{I} \,|\, E_{r_1+1}, \theta_{r_1+1}\rangle \dots \langle E_{n-1}, \theta_{n-1} \,|\, \bar{I} \,|\, E_n, \theta_n\rangle \,.$$

Nous écrirons $C_n(t)$ sous la forme suivante

$$(177)\qquad C_n(t) = \frac{\langle E_0, \theta_0 \,|\bar{I}|\, E_1, \theta_1\rangle \dots \langle E_{r_1-1}, \theta_{r_1-1} \,|\, \bar{I} \,|\, E_{r_1}, \theta_{r_1}\rangle}{(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{1,\theta_1}) \dots (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{r_1-1,\theta_{r_1-1}})} B(t)\,,$$

r_1 est le plus petit des r_α. Dans l'intégrale de $V_{n-s}(t)_D$ il y a le terme $C_{n-s}(t)$, $(s = 1, 2, \dots, r_1 - 1)$

$$(178)\qquad C_{n-s}(t) = \frac{\langle E_0, \theta_0 \,|\, \bar{I} \,|\, E_1, \theta_1\rangle \dots \langle E_{r_1-s-1}, \theta_{r_1-s-1} \,|\, \bar{I} \,|\, E_{r_1}, \theta_{r_1}\rangle}{(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{1,\theta_1}) \dots (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{r_1-s-1,\theta_{r_1-s-1}})} B(t)\,,$$

et dans l'intégrale de $V_{n+s'}(t)_D$ le terme $C_{n+s'}(t)$, $(s' = 1, 2, \dots, \infty)$

$$(179)\qquad C_{n+s'}(t) = \frac{\langle E_0, \theta_0 \,|\, \bar{I} \,|\, E_1, \theta_1\rangle \dots \langle E_{r_1-1}, \theta_{r_1-1} \,|\, \bar{I} \,|\, E'_{r_1}, \theta'_{r_1}\rangle}{(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{1,\theta_1}) \dots (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{r_1-1,\theta_{r_1-1}})} \times$$

$$\times \frac{\langle E'_{r_1}, \theta'_{r_1} \,|\, \bar{I} \,|\, E'_{r_1+1}, \theta'_{r_1+1}\rangle \dots \langle E'_{r_1+s'-1}, \theta'_{r_1+s'-1} \,|\, \bar{I} \,|\, E_{r_1}, \theta_{r_1}\rangle}{(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}'_{r_1,\theta_{r_1}}) \dots (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}'_{r_1+s'-1,\theta'_{r_1+s'-1}})} B(t)\,.$$

Il résulte de (174) que les contributions de tous les C s'entre-détruisent. Puisque $U(t, t_0)$ est la forme particulière de $\bar{U}(t, t_0)$ qui correspond à $F(E, \theta; \lambda) = E$, il y a aussi compensation des termes séculaires dans le développement de $U(t, t_0)$.

RIASSUNTO (*)

I metodi indicati in un precedente lavoro (1) per il caso di spettri discreti si generalizzano pei casi di spettri continui e misti. Si considerano sistemi di particelle e campi quantici. Si mostra che la self-energy d'uno stato dello spettro continuo non è determinata dal calcolo delle perturbazioni a causa dell'ambiguità nella corrispondenza tra livelli perturbati e non perturbati. Si dà una forma modificata dell'equazione di Heitler e Peng per i casi di self-energy. Si mostra che è possibile eliminare i termini secolari nello sviluppo dell'operatore unitario del moto.

N.B. I risultati per i sistemi di particelle sono stati esposti al Colloquio sulla Matematica dell'Elettrone, tenuto nell'Aprile 1949 a l'Université Libre di Bruxelles.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*