

Mario Schönberg

LAS FUNCIONES DE GREEN  
DE LAS  
ECUACIONES DE KLEIN-GORDON

De *Revista de la Unión Matemática Argentina*,  
vol. XII, págs. 238-296, Buenos Aires, 1947.

\*

BUENOS AIRES  
1947

# LAS FUNCIONES DE GREEN DE LA ECUACION DE KLEIN - GORDON

por

MARIO SCHÖNBERG

Departamento de Física, San Pablo (Brasil)

(Recibido el 1 de noviembre de 1946)

ABSTRACT: The Green functions of the Klein-Gordon equation and other functions related to the Green functions, like the fundamental solution defined according to Hadamard's general method and the Riesz method of integration that which correspond to the meson mass are discussed, and the considered as Green functions for complex integration.

The solutions which describe the meson field with frequencies below that which correspond to the meson mass are discussed, and the consideration of these solutions allow to describe satisfactorily the transition from a general meson field to a static one. This transition presents some new features in the case when the rest mass of the field quanta is not zero.

Finally, the behaviour of the Green functions of the retarded and advanced fields in relation to the value of the variable in regard to the light cone is discussed.

## 1. — *Introducción.*

En la mecánica cuántica relativista, la relación entre la energía y el impulso de una partícula libre

$$E^2 = c^2 (\vec{p}^2 + m^2 c^2), \quad (1)$$

donde

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} = \text{trivector de impulso} \\ m = \text{masa en reposo de la partícula,} \\ E = \text{energía de la partícula} \end{array} \right\} \quad (2)$$

se expresa mediante la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + \chi^2) \psi = 0. \quad (3)$$

$\square$  es el D'Alembertiano

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3); \quad (4)$$

$\psi$  una componente del tensor de onda o del espinor, y

$$\chi = \frac{2\pi mc}{h}. \quad (5)$$

La ecuación de Klein-Gordon es similar a la así llamada «ecuación de las ondas amortiguadas»

$$(\square - k^2) \psi = 0, \quad (6)$$

que fué analizada por muchos matemáticos (ver Hadamard<sup>(1)</sup>, Courant-Hilbert<sup>(2)</sup>). Los resultados de la teoría de la ecuación (6), pueden ser aplicados a la ecuación de Klein-Gordon, suponiendo imaginaria la constante de amortiguamiento  $k$ . La ecuación de Klein-Gordon fué también investigada directamente por Bhabha<sup>(3)</sup>, Stückelberg<sup>(4)</sup> y Schrödinger<sup>(5)</sup>. Muchas de las propiedades de la ecuación de Klein-Gordon, están contenidas implícitamente en las numerosas investigaciones referentes a la ecuación de Dirac para partículas libres. Así, por ejemplo, puede ser obtenida inmediatamente una función de Green para la ecuación de Klein-Gordon, del espinor de Green de las ecuaciones de Dirac, dadas por Schönberg<sup>(6)</sup>.

Bhabha<sup>(3)</sup> dedujo las funciones de Green para las soluciones retardada y avanzada de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon. La función de Green obtenida por Schönberg<sup>(6)</sup> corresponde a las soluciones semi-retardada semi-avanzada de la ecuación de Klein-Gordon. Veremos que es posible deducir las funciones de Green dadas por Bhabha, de la función de Green dada por Schönberg.

En este trabajo examinaremos las funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon, correspondientes a varias clases de

soluciones; y otros tipos de funciones que están relacionadas con las funciones de Green, tales como la solución fundamental definida de acuerdo al método general de Hadamard y la función que aparece en el método de integración de Riesz (<sup>7</sup>). Se examinan las relaciones entre las funciones de Green y las diferentes funciones mencionadas, y se demuestra que algunas de ellas pueden ser consideradas como funciones de Green en el dominio de la integración compleja.

Se discuten las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon que describen el campo mesónico creado por densidades de nucleones que vibran con frecuencias inferiores a la que corresponde a la masa del mesón. Estas soluciones ya fueron consideradas por Schrödinger (<sup>5</sup>), pero la comparación que hace de las fuerzas nucleares y las fuerzas de Coulomb, no está completamente justificada y no conduce a una interpretación satisfactoria de aquellas soluciones. Las vibraciones de una distribución nucleónica, con frecuencias menores que la correspondiente a la masa en reposo del mesón, son muy interesantes porque están relacionadas con la teoría de los isobaros de los nucleones. Llamamos a estas frecuencias, frecuencias isobáricas y a las vibraciones correspondientes, vibraciones isobáricas. La consideración de las vibraciones isobáricas nos permite describir satisfactoriamente la transición de un campo mesónico general a uno estático; esta transición presenta algunos aspectos nuevos en el caso en el cual la masa en reposo del cuanto de campo no es cero.

Cuando se considera la ecuación de Klein-Gordon referida a un campo de ondas de electrones, es conveniente examinar la parte que desempeñan las ondas de energía positiva y negativa. Este punto de vista conduce a la consideración de dos funciones que indicaremos con  $D^{(+)}$  y  $D^{(-)}$ . Estas funciones están relacionadas con la bien conocida función  $D$ , que es tan importante en la teoría de las reglas de conmutación relativistas; y está también estrechamente relacionada con la función de Green de la ecuación de Klein-Gordon. Por combinación lineal de las funciones  $D^{(+)}$  y  $D^{(-)}$ , obtenemos otra función  $D_1$ , bien conocida, que está relacionada con la solución fundamental de la ecuación de Klein-Gordon  $V$ . Tanto  $V$  como  $D_1$ , pueden ser usados para deducir las soluciones avanzadas y retardadas de la ecuación de Klein-Gordon; basta tratar el tiempo como una variable compleja. Demostraremos que es posible obtener estas formas de

la solución partiendo de la ecuación diferencial de derivadas parciales elíptica

$$\sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu}^2} - \chi^2 \right) \psi = -4\pi\rho. \quad (7)$$

La consideración de las ondas con energía positiva y negativa es también importante en la teoría del campo mesónico. Pauli<sup>(8)</sup> extendió el método de Dirac de la cuantización del campo con fotones negativos, a los campos mesónicos. Schönberg<sup>(9)</sup> demostró que los fotones con energía negativa que fueran introducidos por Dirac, pueden ser obtenidos sin ningún método especial de cuantización, teniendo presente que el campo de radiación de un sistema de partículas eléctricas contiene ondas retardadas y avanzadas, que dan origen a fotones positivos y negativos, respectivamente. Las mismas consideraciones pueden ser extendidas al campo mesónico, como se demostrará en otra parte. El análisis de las funciones  $D^{(+)}$  y  $D^{(-)}$  indica inmediatamente que el campo de radiación contiene ondas con energías positiva y negativa.

Las relaciones entre las funciones de Green y los campos creados por fuentes puntuales, se examinarán en la sección 18; se demuestra allí que es equivalente conocer la función de Green para un tipo dado de solución o la solución de este tipo creado por una fuente puntual en movimiento. En el caso de un campo estático, no hay diferencia entre la función de Green y el campo de una fuente puntual, pero esto no sigue siendo cierto en el caso dinámico general. Es interesante hacer notar que las funciones de Green dinámicas son funciones simbólicas, pero las soluciones correspondientes a fuentes puntuales son funciones comunes.

Las funciones de Green de los campos retardados y avanzados  $G_{ret}(x, x')$  y  $G_{adv}(x, x')$ , desaparecen cuando el punto de universo ( $x'$ ) está fuera del cono de luz de ( $x$ ); hay otras funciones de Green que no desaparecen en este caso. Hay también una función de Green que desaparece cuando ( $x'$ ) está dentro del cono de luz de ( $x$ ); esta función de Green permite formar soluciones que describen acciones con velocidad de propagación mayor que  $c$ . Llamaremos funciones de Green externas a las funciones de Green que no desaparecen cuando ( $x'$ ) está fuera del cono de luz de ( $x$ ). Serán estudiadas en las secciones 21

y 22. Es notable que las funciones de Green que desaparecen en el interior del cono de luz, no son las más simples.

En la definición usual de la solución fundamental, no es necesario tratar por separado las ecuaciones diferenciales de derivadas parciales elíptica e hiperbólica, de segundo orden. Sin embargo es dudoso si esto es siempre conveniente. La función  $\pi D_1$  tiene todas las propiedades esenciales de la solución fundamental de Hadamard, y es una generalización más adecuada de la solución fundamental de D'Alembert. Parece más satisfactorio tomar  $\pi D_1$  como la solución fundamental de la ecuación de Klein-Gordon, en lugar de la función de Hadamard  $V(x, x')$ . Tal vez el único inconveniente de esta elección sería la pérdida de la relación con la solución fundamental de la ecuación elíptica (7).

2. — *Relación entre las funciones de Green, de Bhabha y Schönberg.*

Dirac<sup>(10)</sup> introdujo en la teoría del positrón una función  $D(x)$ , definida por las condiciones

$$(\square + \chi^2) D(x) = 0 \tag{8}$$

$$D(x) = 0 \quad \text{para } x_0 = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} D(x) = 2\pi \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \quad \text{para } x_0 = 0. \tag{10}$$

Se ve fácilmente que

$$D(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp. [i (\vec{K} \cdot \vec{r})] \frac{\text{sen } k_0 x_0}{k_0} d_3 \vec{K} \tag{11}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$k_0 = \sqrt{\vec{K}^2 + \chi^2}. \tag{12}$$

Dirac dió también una expresión de  $D(x)$  en función de funciones de Bessel

$$D(x) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(r, x_0) \quad (13)$$

$$F(r, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2} J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & x_0 > r \\ 0 & r > x_0 > -r \\ -\frac{1}{2} J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & -r > x_0 \end{cases} \quad (14)$$

Podemos obtener una expresión más «condensada» de  $F(r, x_0)$ , usando la función discontinua  $\text{sgn}(u)$

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} +1 & u > 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$F(r, x_0) = \frac{1}{4} [\text{sgn}(x_0+r) + \text{sgn}(x_0-r)] J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}). \quad (16)$$

Teniendo presente que

$$\frac{d}{du} \text{sgn}(u) = 2 \delta(u) \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} J_0(0) &= 1 \\ J'_0(0) &= -J_1(0) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

obtenemos

$$D(x) = \frac{\delta(x_0-r) - \delta(x_0+r)}{2r} - \chi \frac{\text{sgn}(x_0-r) + \text{sgn}(x_0+r)}{4\sqrt{x_0^2 - r^2}} J_1(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}). \quad (19)$$

El método de Schönberg <sup>(6)</sup> conduce a la función de Green

$$G(x, x') = \text{sgn}(x_0 - x'_0) D(x - x'). \quad (20)$$

Tenemos

$$(\square + \chi^2) G(x, x') = 2\delta'(x_0 - x'_0) D(x - x') + 4\delta(x_0 - x'_0) \frac{\partial}{\partial x_0} D(x - x'). \quad (21)$$

Teniendo presente la identidad

$$\delta'(u - a) f(u) = \delta'(u - a) \cdot f(a) - \delta(u - a) f'(a) \quad (22)$$

que es válida para cualquier función continua  $f(u)$  con derivada continua, obtenemos de (21)

$$(\square + \chi^2) G(x, x') = 4\pi\delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \quad (23)$$

Por lo tanto  $G(x, x')$  es una función de Green de la ecuación de Klein-Gordon.

De (13) y (16) resulta que

$$G(x, x') = \delta(\{x^\mu - x'^\mu\} \{x_\mu - x'_\mu\}) - \chi J_1(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}) \left| \frac{2 + \operatorname{sgn}(\{x_0 - x'_0\} - |\vec{r} - \vec{r}'|) - \operatorname{sgn}(\{x_0 - x'_0\} + |\vec{r} - \vec{r}'|)}{4 \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} \right|. \quad (24)$$

En el caso particular de masa en reposo nula del cuanta de campo,  $\chi = 0$  y

$$G(x, x') = \delta(\{x_\mu - x'^\mu\} \{x_\mu - x'_\mu\}) = \delta(x, x'). \quad (25)$$

Como  $\delta(x, x')$  es la función de Green para las soluciones semi-retardada semi-avanzada de la ecuación inhomogénea de D'Alembert, vemos que  $G(x, x')$  es la función de Green para las soluciones semi-retardada semi-avanzada de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon. Esto se ve también en la expresión de  $G(x, x')$  derivada de (11)

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i (\vec{K} \cdot \vec{r} - r')] \frac{\text{sen } k_0 |x_0 - x'_0|}{k_0} d_3 \vec{K}. \quad (26)$$

que muestra la simetría de  $G(x, x')$  con respecto al pasado y al futuro.

Las funciones de Green para las soluciones avanzada y retardada son

$$G_{rel}(x, x') = G(x, x') + D(x - x'). \quad (28)$$

$$G_{av}(x, x') = G(x, x') - D(x - x'). \quad (27)$$

$G_{rel}(x, x')$  desaparece salvo que el punto de universo  $(x')$  esté dentro o sobre el cono del pasado de  $(x)$ ;  $G_{av}(x, x')$  desaparece salvo que  $(x')$  esté dentro o sobre el cono del futuro de  $(x)$ . Obtenemos de las ecuaciones (19) y (24)

$$G_{rel}^1(x, x') = [1 + \text{sgn}(x_0 - x'_0)] \delta(x, x') - \frac{1 + \text{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)}{2\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} \chi J_1(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}). \quad (29)$$

$$G_{av}(x, x') = [1 - \text{sgn}(x_0 - x'_0)] \delta(x, x') - \frac{1 - \text{sgn}(x_0 - x'_0 + |\vec{r} - \vec{r}'|)}{2\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} \chi J_1(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}). \quad (30)$$

Estas son las funciones de Green obtenidas por Bhabha.

$G_{rel}$  y  $G_{av}$  pueden ser expresadas como integrales

$$G_{rel}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i (\vec{K} \cdot \vec{r} - r')] \frac{\text{sen } k_0 |x_0 - x'_0| + \text{sen } k_0 (x_0 - x'_0)}{k_0} d_3 \vec{K} \quad (31)$$

$$G_{av}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i (\vec{K} \cdot \vec{r} - r')]$$

$$\frac{\text{sen } k_0 |x_0 - x'_0| - \text{sen } k_0 (x_0 - x'_0)}{k_0} d_3 \vec{K}. \quad (32)$$

3. — *El campo de radiación del mesón.*

De las definiciones de  $G_{rei}$  y  $G_{av}$  resulta que

$$G(x, x') = \frac{1}{2} [G_{rei}(x, x') + G_{av}(x, x')] \quad (33)$$

$$D(x-x') = \frac{1}{2} [G_{rei}(x, x') - G_{av}(x, x')]. \quad (34)$$

Consideremos un campo mesónico pseudoescalar creado por una distribución nucleónica. El campo  $\psi$  del mesón está determinado por una ecuación de la siguiente forma

$$(\square + \chi^2) \psi = 4\pi\rho, \quad (35)$$

donde  $\rho$  está definido por la distribución nucleónica. Las cantidades  $\psi_{lig}$  y  $\psi_{irr}$ :

$$\psi_{lig}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \rho(x') d_4 x' \quad (36)$$

$$\psi_{irr}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-x') \rho(x') d_4 x' \quad (37)$$

son respectivamente análogos a los potenciales ligado e irradiado introducidos por Leite Lopes y Schönberg<sup>(11)</sup> en la teoría del electrón. Las llamaremos campos mesónicos ligado e irradiado.  $\psi_{lig}$  es una solución de la ecuación (35) y  $\psi_{irr}$  una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon:

$$(\square + \chi^2) \psi_{lig} = 4\pi\rho \quad (38)$$

$$(\square + \chi^2) \psi_{irr} = 0. \quad (39)$$

Consideremos las integrales de Fourier que representan  $\text{sen } k_0 |x_0|$  y  $\text{sen } k_0 x_0$ ,

$$\operatorname{sen} k_0 |x_0| = \frac{k_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i K_0 x_0} \frac{dK_0}{k_0^2 - K_0^2} \quad (40)$$

$$\operatorname{sen} k_0 x_0 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i K_0 x_0} [\delta(k_0 - K_0) - \delta(k_0 + K_0)] dK_0. \quad (41)$$

Introduciendo estas expresiones en las integrales que representan  $G(x, x')$  y  $D(x, x')$ , obtenemos

$$G(x, x') = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i K^\mu (x_\mu - x'_\mu)] \frac{d_4 K}{k_0^2 - K_0^2} \quad (42)$$

$$D(x - x') = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i K^\mu (x_\mu - x'_\mu)] \frac{\delta(k_0 - K_0) - \delta(k_0 + K_0)}{k_0} d_4 K. \quad (43)$$

Las expresiones bajo el signo integral en el miembro derecho de la ecuación (43) se anulan, salvo que

$$K_0 = \pm \sqrt{\vec{K}^2 + \chi^2}. \quad (44)$$

Pero esta es precisamente la condición a que debe satisfacer  $K_0$  para que  $\frac{h}{2\pi} c K_0$  sea la energía de un mesón con impulso  $\frac{h}{2\pi} \vec{K}$  ( $\vec{K}$  es el trivector con componentes  $K^1, K^2, K^3$ ).

Con ayuda de (42) y (43) podemos obtener las integrales de Fourier para  $\psi_{ij}$  y  $\psi_{irr}$ ,

$$\psi_{ij}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i K^\mu x_\mu] \varphi(K) \frac{d_4 K}{k_0^2 - K_0^2} \quad (45)$$

$$\psi_{irr}(x) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i K^\mu x_\mu] \varphi(K) \frac{\delta(k_0 - K_0) - \delta(k_0 + K_0)}{k_0} d_4 K. \quad (46)$$

$\varphi(K)$  es la transformada de Fourier de  $\rho(x)$

$$\varphi(K) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i K^\mu x'_\mu] \rho(x') \cdot d_4 x'. \quad (47)$$

Las ecuaciones (45) y (46) muestran claramente las diferencias esenciales entre los campos mesónicos ligado e irradiado; las frecuencias y los números de onda de las ondas planas que aparecen en el desarrollo de Fourier de  $\psi_{irr}$  están correlacionados, mientras que no existe una tal correlación para las frecuencias y los números de onda de las ondas del campo ligado.

Resulta de (44) que

$$|K_0| \geq \chi. \quad (48)$$

Por lo tanto:

«En el desarrollo de Fourier del campo de radiación no hay ondas con frecuencias isobáricas».

Llamaremos frecuencias isobáricas aquellas que corresponden a energías con valor absoluto menor que la masa en reposo del cuanto de campo

$$c \frac{h}{2\pi} |K_0| < mc^2 \quad (49)$$

o

$$|K_0| < \chi. \quad (50)$$

#### 4. — Análisis de Fourier de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon.

Consideremos las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon de forma

$$\psi = e^{i K_0 x_0} \vec{u}(x) \quad (51)$$

en la cual  $u$  depende solamente de las coordenadas espaciales  $x_1, x_2, x_3$ .  $u$  es una solución de la ecuación

$$\Delta u + (K_0^2 - \chi^2) u = 0. \quad (52)$$

Si  $K_0$  no corresponde a una frecuencia isobárica, la ecuación (52) es la bien conocida ecuación de oscilación (Schwingungsgleichung)

$$\Delta u + K^2 u = 0. \quad (K^2 = K_0^2 - \chi^2). \quad (53)$$

Cuando  $K_0$  corresponde a una frecuencia isobárica, obtenemos, en lugar de (53), la ecuación estática de Yukawa

$$\Delta u - K^2 u = 0, \quad (K^2 = \chi^2 - K_0^2). \quad (54)$$

Ahora podemos entender por qué las ondas con frecuencias isobáricas no aparecen en la expresión del campo de radiación: estas ondas están relacionadas con el campo estático y pertenecen al campo ligado, que es la generalización relativista del campo estático.

La ecuación (53) admite las dos soluciones elementales

$$V_1 = \frac{e^{iKr}}{r} \quad V_2 = \frac{e^{-iKr}}{r} \quad (55)$$

$$\Delta V + K^2 V = -4\pi \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3), \quad (56)$$

que son ambas oscilatorias y tienden hacia cero en el infinito. Por medio de  $V_1$  y  $V_2$  formamos las funciones  $V^{(+)}$  y  $V^{(-)}$

$$V^{(+)} = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) = \frac{\cos kr}{r} \quad (57)$$

$$V^{(-)} = \frac{1}{2i} (V_1 - V_2) = \frac{\text{sen } kr}{r}. \quad (58)$$

$V^{(+)}$  es también una solución elemental de (53), es decir, una solución de (56);  $V^{(-)}$  es finita en el origen. Necesitaremos a  $V^{(+)}$  para formar  $G(x, x')$  y  $V^{(-)}$  para formar  $D(x-x')$ .

La solución elemental de (54) que corresponde a  $V_1$  y  $V_2$  son  $w_1$  y  $w_2$

$$w_1 = \frac{e^{-Kr}}{r}, \quad w_2 = \frac{e^{Kr}}{r} \quad (59)$$

$$\Delta w + K^2 w = -4\pi \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3). \quad (60)$$

$w_1$  tiende hacia cero en el infinito, pero  $w_2$  diverge en el infinito. Por esto es inútil considerar las funciones  $w^{(+)}$  y  $w^{(-)}$

$$w^{(+)} = \frac{1}{2} (w_1 + w_2) \quad (61)$$

$$w^{(-)} = \frac{1}{2} (w_1 - w_2), \quad (62)$$

ya que ambas divergen en el infinito. Podemos pues obtener una solución elemental  $w_1$  de (54), que tiende hacia cero en el infinito, pero no una solución similar a  $V^{(-)}$  que está limitada en el infinito. Esto es en esencia la razón matemática para excluir las frecuencias isobáricas del campo de radiación, como veremos.

Consideremos la ecuación (35). Para obtener la solución retardada representemos  $\rho(x)$  por la integral de Fourier

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\rightarrow}{\sigma}(x, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0, \quad (63)$$

y  $\psi_{rel}(x)$  por la integral de Fourier

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\rightarrow}{\varphi}_{rel}(x, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0. \quad (64)$$

La función  $\overset{\rightarrow}{\varphi}_{rel}(x, K_0)$  es una solución de la ecuación

$$(\Delta + K^2) \overset{\rightarrow}{\varphi}_{rel}(x, K_0) = -4\pi \overset{\rightarrow}{\sigma}(x, K_0) \quad |K_0| \geq \chi \quad (65)$$

$$K^2 = K_0^2 - \chi^2 \quad (65a)$$

o de la ecuación

$$(\Delta - K^2) \overset{\rightarrow}{\varphi}_{rel}(x, K_0) = -4\pi \overset{\rightarrow}{\sigma}(x, K_0); \quad |\vec{K}_0| < \chi \quad (66)$$

$$K^2 = \chi^2 - K_0^2. \quad (66a)$$

Por razones obvias debemos usar la solución elemental  $w_1$  para resolver (66), de manera que

$$\varphi_{rel}^{\rightarrow}(x, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{\rightarrow}(x', K_0) \frac{e^{-K\bar{r}}}{\bar{r}} d_3 x'; \quad |K_0| < \chi \quad (67)$$

$$\bar{r} = \sqrt{(x-x')^2}. \quad (68)$$

Para obtener la solución retardada de (35) debemos usar la solución elemental  $V_1$  para valores positivos de  $K_0$  y  $V_2$  para valores negativos

$$\varphi_{rel}^{\rightarrow}(x, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{\rightarrow}(x', K_0) \frac{e^{+iK\bar{r}}}{\bar{r}} d_3 x' \quad K_0 \geq \chi \quad (69a)$$

$$\varphi_{rel}^{\rightarrow}(x, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{\rightarrow}(x', K_0) \frac{e^{-iK\bar{r}}}{\bar{r}} d_3 x' \quad K_0 \leq -\chi \quad (69b)$$

porque la solución retardada está formada por ondas emergentes.

En forma similar podemos obtener la solución avanzada de (35) considerando su integral de Fourier

$$\psi_{av} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{av}^{\rightarrow}(x, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0. \quad (70)$$

La  $\varphi_{av}^{\rightarrow}(x, K_0)$  de una frecuencia isobárica es

$$\varphi_{av}^{\rightarrow}(x, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{\rightarrow}(x', K_0) \frac{e^{-K\bar{r}}}{\bar{r}} d_3 x'; \quad |K_0| < \chi. \quad (71)$$

El mismo razonamiento que nos condujo a (67) y (69) nos da ahora

$$\varphi_{av}(\vec{x}, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{e^{-iK\vec{r}}}{r} d_3 \vec{x}' \quad K_0 \geq \chi \quad (72a)$$

$$\varphi_{av}(\vec{x}, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{e^{-iK\vec{r}}}{r} d_3 \vec{x}' \quad K_0 \leq -\chi. \quad (72b)$$

Se ve de (67) y (71) que las frecuencias isobáricas dan la misma contribución al campo retardado como al avanzado, ya que

$$\varphi_{re}(\vec{x}, K_0) = \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) \quad |K_0| < \chi. \quad (73)$$

Esto es una consecuencia de la necesidad de usar la solución elemental  $w_1$  para obtener la contribución de las frecuencias isobáricas tanto en el campo avanzado como en el retardado. Por lo tanto tenemos

$$\psi_{irr}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{irr}(\vec{x}, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0 \quad (74)$$

$$\varphi_{irr}(\vec{x}, K_0) = 0 \quad |K_0| < \chi \quad (75a)$$

$$\varphi_{irr}(\vec{x}, K_0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{\text{sen } K\vec{r}}{r} d_3 \vec{x}'; \quad K_0 \geq \chi \quad (75b)$$

$$\varphi_{irr}(\vec{x}, K_0) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\vec{x}', K_0) \frac{\text{sen } K\vec{r}}{r} d_3 \vec{x}'; \quad K_0 \leq -\chi. \quad (75c)$$

Para los potenciales ligados obtenemos

$$\psi_{lij}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{lij}(\vec{x}, K_0) e^{-iK_0 x_0} dK_0 \quad (76)$$

$$\varphi_{lij}(\vec{x}, K_0) = \varphi_{re}(\vec{x}, K_0) = \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) \quad |K_0| < \chi \quad (76a)$$

$$\varphi_{ij}^{\rightarrow}(x, K_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{\rightarrow}(x', K_0) \frac{\cos K\vec{r}}{r} d_3 x' \quad |K_0| \geq \chi. \quad (76b)$$

Schrödinger (5) observó que la división en dos partes del campo del mesón creado por una distribución nucleónica, una de las cuales correspondería a una masa en reposo nula del cuanto de campo y la otra que se anula cuando  $\chi=0$ , no tiene sentido físico, porque no separa las acciones a corto alcance de las de largo alcance. Una división tal se obtiene de las expresiones (29) y (30) de las funciones de Green para los campos retardados, y de la expresión (19) de  $D(x)$ . La fórmula (19) no indica en forma explícita que realmente no hay una parte correspondiente a acciones de corto alcance en el campo de radiación, como resulta de la ecuación (75a) (véase sección 7).

Un caso muy importante es aquél en el cual

$$\sigma^{\rightarrow}(x, K_0) = 0 \quad \text{para} \quad |K_0| \geq \chi. \quad (77)$$

Este caso incluye como otro particular el campo estático que corresponde a

$$\sigma^{\rightarrow}(x, K_0) = \sigma^{\rightarrow}(x) \cdot \delta(K_0). \quad (78)$$

Resulta de (77) que

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{\rightarrow}(x, K_0) &= \varphi_{re}^{\rightarrow}(x, K_0) = \varphi_{av}^{\rightarrow}(x, K_0) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{\rightarrow}(x', K_0) \frac{e^{-K\vec{r}}}{r} d_3 x' \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(x) &= \psi_{re}(x) = \psi_{av}(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{\rightarrow}(x', K_0) \exp. [-iK_0 x_0 - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} \vec{r}] \frac{1}{r} dK_0 d_3 x' \end{aligned} \quad (80)$$

$$\psi_{irr}(x) = 0. \quad (81)$$

Cuando

$$\vec{\sigma}(x, K_0) = \vec{\sigma}(x) \delta \left( K_0 - \frac{w}{c} \right) \quad (82)$$

$$\psi_{ij}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\rho(x')]_{x'=x_0} \frac{e^{-\chi' r}}{r} d_3 x' \quad (83)$$

$$\chi' = \sqrt{\chi^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (84)$$

La ecuación (83) contiene como caso particular la expresión de Yukawa de los campos estáticos. Conduce a una conclusión interesante:

«El alcance del campo estático debido a un isobaro excitado aumenta con la excitación del isobaro».

En realidad el alcance del campo es  $(\chi')^{-1}$ , y la excitación del isóbaro es  $\frac{h}{2\pi}\omega$ .

5. — Apliquemos las fórmulas (67)-(69) y (71) y (72) al caso en el cual

$$\rho(x) = \delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \quad (85)$$

Ahora

$$\vec{\sigma}(x, K_0) = \frac{1}{2\pi} e^{iK_0 x'_0} \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3) \quad (86)$$

$$\varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) = \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) = \frac{1}{2\pi r} \exp [iK_0 x'_0 - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} r], \quad |K_0| < \chi \quad (87)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{rel}(\vec{x}, K_0) &= \frac{1}{2\pi r} \exp [iK_0 x'_0 + i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \\ \varphi_{av}(\vec{x}, K_0) &= \frac{1}{2\pi r} \exp [iK_0 x'_0 - i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \end{aligned} \right\} K_0 \geq \chi \quad (88)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{rel}^{\rightarrow}(x, K_0) &= \frac{1}{2\pi r} \exp [iK_0 x'_0 - i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \\ \varphi_{av}^{\rightarrow}(x, K_0) &= \frac{1}{2\pi r} \exp [iK_0 x'_0 + i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \end{aligned} \right\} K_0 \leq -\chi. \quad (89)$$

Las funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon son las soluciones de (35) con

$$\rho(x) = \delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3).$$

Por lo tanto las partes de las funciones de Green  $G(x, x')$ ,  $G_{rel}(x, x')$  y  $G_{av}(x, x')$  que provienen de las frecuencias isobáricas son las mismas; designaremos estas partes con  $G_{is}(x, x')$ :

$$\begin{aligned} G_{is}(x, x') &= \frac{1}{2\pi r} \int_{-\chi}^{+\chi} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} r] dK_0 = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\chi}^{+\chi} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} \end{aligned} \quad (90)$$

Las partes de  $G(x, x')$ ,  $G_{rel}(x, x')$  y  $G_{av}(x, x')$  que provienen de las frecuencias no isobaras las designaremos con  $\Gamma(x, x')$ ,  $\Gamma_{rel}(x, x')$  y  $\Gamma_{av}(x, x')$ , respectivamente.

$$\Gamma(x, x') = \frac{1}{2} [\Gamma_{rel}(x, x') + \Gamma_{av}(x, x')] \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{rel}(x, x') &= \frac{1}{2\pi r} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) - i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] dK_0 + \\ &+ \frac{1}{2\pi r} \int_{\chi}^{\infty} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) + i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] dK_0. \end{aligned} \quad (92)$$

$$\Gamma_{av}(x, x') = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp [-iK_0(x_0 - x'_0) + i \sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] dK_0 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi r} \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) - i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] dK_0. \quad (93)$$

Evidentemente tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{rel}(x, x') &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) + i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) - i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} \right\}. \quad (94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{av}(x, x') &= \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) - i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) + i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} \right\}. \quad (95) \end{aligned}$$

La división de las funciones de Green en partes provenientes de las frecuencias isobaras y no isobaras no es relativísticamente invariante, pero es muy conveniente para muchos fines, como veremos. Los desarrollos de Fourier de las funciones de Green nos permite computarlas fácilmente. Así, por ejemplo, calculemos  $G_{re}(x, x')$  para valores positivos de  $s^2$

$$s^2 = (x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu) = (x_0 - x'_0)^2 - r^2. \quad (96)$$

Podemos elegir el sistema de referencia de Lorentz de tal manera que

$$r = 0, \quad s^2 = (x_0 - x'_0)^2. \quad (97)$$

Como  $G_{re}(x, x')$  es invariante, puede depender solamente de  $s^2$  y del signo de  $(x_0 - x'_0)$ , porque suponemos que  $s^2 > 0$ . Por lo tanto, si fijamos el signo de la diferencia  $(x_0 - x'_0)$ ,

$G_{rel}(x, x')$  será una función de la variable  $s$ , de manera que obtenemos de (90) y (94)

$$G_{rel}(x, x') = \frac{1}{s} \frac{d}{ds} I_{rel}(s) \quad (98)$$

$$\begin{aligned} I_{rel}(s) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} + \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) + i\sqrt{K_0^2 - \chi_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} - \\ & \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0) - i\sqrt{K_0^2 - \chi_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}}. \quad (99) \end{aligned}$$

En el sistema de referencia especificado por (97),  $I_{rel}(s)$  es

$$\begin{aligned} I_{rel}(s) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} + \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}}. \quad (100) \end{aligned}$$

Cambiamos las variables en las integrales del miembro derecho de la ecuación (100). Poniendo

$$K_0 = \chi z \quad (101)$$

en estas integrales obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} &= \int_{-1}^{+1} \exp[-i\chi(x_0-x'_0)z] \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \\ &= \pi J_0(\chi(x_0-x'_0)) \quad (102) \end{aligned}$$

$$\int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2-\chi^2}} = \int_1^{\infty} \exp[-i\chi(x_0-x'_0)z] \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(\chi(x_0-x'_0)) & \text{para } x_0-x'_0 > 0 \\ \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\chi(x_0-x'_0)) & \text{para } x_0-x'_0 < 0 \end{cases} \quad (103)$$

$$\int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2-\chi^2}} = \int_{-\infty}^{-1} \exp[-i\chi(x_0-x'_0)z] \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\chi(x_0-x'_0)) & \text{para } x_0-x'_0 > 0 \\ -\frac{i\pi}{2} H_0^{(2)}(\chi(x_0-x'_0)) & \text{para } x_0-x'_0 < 0. \end{cases} \quad (104)$$

$H_0^{(1)}$  y  $H_0^{(2)}$  son funciones de Hankel de orden cero. Por lo tanto

$$I_{ret}(s) = \frac{1}{2} J_0(\chi(x_0-x'_0)) \pm \frac{1}{4} [H_0^{(1)}(\chi(x_0-x'_0)) +$$

$$+ H_0^{(2)}(\chi(x_0-x'_0))] = J_0(\chi(x_0-x'_0)) \frac{1+\text{sgn}(x_0-x'_0)}{2}; \quad (s^2 > 0) \quad (105)$$

De donde

$$\left. \begin{aligned} G_{re}^+(x, x') &= -\frac{\chi}{s} J_1(\chi s), & x_0 > x'_0, & s^2 > 0 \\ G_{re}^-(x, x') &= 0 & x_0 < x'_0, & s^2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Cuando  $s^2$  es negativo elegimos un sistema de referencia en el cual

$$x_0 - x'_0 = 0, \quad s = i\bar{r}. \quad (107)$$

En este sistema de referencia

$$\begin{aligned}
 I_{rel}(s) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{+\chi} \exp[-\sqrt{\chi^2 - K_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} + \\
 & + \frac{i}{2\pi} \int_{\chi}^{\infty} \exp[i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} - \\
 & - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}}. \quad (108)
 \end{aligned}$$

Ahora no es más necesario fijar el signo de  $x - x'$ , porque no es más invariante. Introduciendo la variable  $z$  de la ecuación (101) obtenemos

$$\int_{-\chi}^{+\chi} \exp[-\sqrt{\chi^2 - K_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} = \int_{-1}^{+1} \exp[-\chi \sqrt{1 - z^2} r] \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (109)$$

$$\int_{\chi}^{\infty} \exp[i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} = \int_1^{\infty} \exp[i\chi \sqrt{z^2 - 1} r] \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad (110)$$

$$\int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} = \int_{-\infty}^{-1} \exp[-i\chi \sqrt{z^2 - 1} r] \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}. \quad (111)$$

Resulta de (109), (110) y (111) que  $I_{rel}(s)$  puede ser expresado como una integral compleja

$$I_{rel}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_L \exp[-\chi r \sqrt{1 - z^2}] \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad s^2 < 0. \quad (112)$$

$L$  es el camino de integración representado en la figura 1. Se ve fácilmente que la integral compleja (112) se anula

$$I_{rel}(x, x') = 0, \quad s^2 < 0. \quad (113)$$

La función de Green  $G_{av}(x, x')$  puede ser estimada en la misma manera que  $G_{rel}(x, x')$ , introduciendo la integral  $I_{av}(x, x')$

$$G_{av}(x, x') = \frac{1}{s} \frac{d}{ds} I_{av}(s) \quad (114)$$

$$\begin{aligned} I_{av}(s) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{\chi^2 - K_0^2}} + \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\chi} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) + i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}} - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{\chi}^{\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) - i\sqrt{K_0^2 - \chi^2} r] \frac{dK_0}{\sqrt{K_0^2 - \chi^2}}. \quad (115) \end{aligned}$$

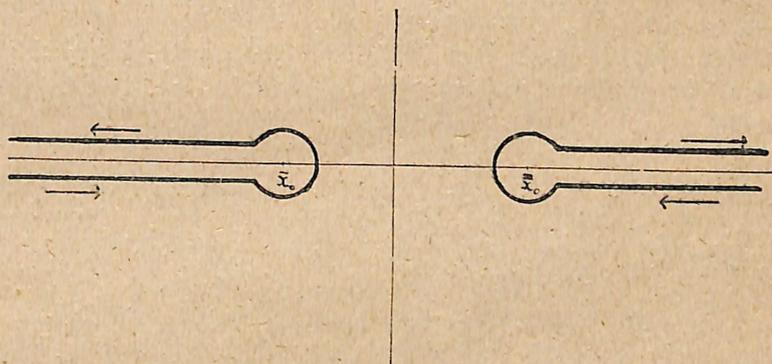


Fig. 1.

Se ve inmediatamente, comparando (115) y (99) que

$$\left. \begin{aligned} G_{av}(x, x') = 0, & \quad x_0 > x'_0, \quad s^2 > 0 \\ G_{av}(x, x') = -\frac{\chi}{s} J_1(\chi s), & \quad x_0 < x'_0, \quad s^2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

$$I_{av}(s) = I_{re}(s) = 0, \quad s^2 < 0. \quad (117)$$

Por lo tanto

$$G_{re}(x, x') = G_{av}(x, x') = 0, \quad s^2 < 0. \quad (118)$$

Resulta de (106), (116) y (118) que

$$G(x, x') = -\frac{\chi}{2s} J_1(\chi s), \quad s^2 > 0 \quad (119)$$

$$G(x, x') = 0, \quad s^2 < 0. \quad (120)$$

Como las frecuencias isobaras dan la misma contribución a  $G_{ret}$  y  $G_{av}$  tenemos

$$D(x-x') = \frac{1}{2} [\Gamma_{ret}(x, x') - \Gamma_{av}(x, x')]. \quad (121)$$

Y por lo tanto, la diferencia entre  $\Gamma_{ret}$  y  $\Gamma_{av}$ , es invariante.

Ahora debemos investigar el comportamiento de las funciones de Green cuando  $(x')$  está sobre el cono de luz del punto  $(x)$ . Esto se puede hacer fácilmente investigando el comportamiento de  $I_{ret}(s)$  e  $I_{av}(s)$  sobre este cono de luz.  $I_{ret}(s)$  tiene una discontinuidad simple sobre el semicono del pasado e  $I_{av}(s)$  tiene una discontinuidad similar sobre el semicono del futuro. Por lo tanto

$$G_{ret}(x, x') = \frac{\delta(x_0 - x'_0 - r)}{r} - \frac{\chi}{s} J_1(\chi s), \quad s^2 \geq 0, \quad x_0 > x'_0 \quad (122)$$

$$G_{ret}(x, x') = 0, \quad x_0 - x'_0 < r. \quad (123)$$

y

$$G_{av}(x, x') = \frac{\delta(x_0 - x'_0 + r)}{r} - \frac{\chi}{s} J_1(\chi s), \quad s^2 \leq 0, \quad x_0 < x'_0 \quad (124)$$

$$G_{av}(x, x') = 0, \quad x_0 - x'_0 < \bar{r}. \quad (125)$$

Así hemos obtenido todos los resultados de la sección 2 por medio de los desarrollos de Fourier.

6. —  $G_{i_3}(x, x')$  es una solución de la ecuación

$$(\square + \chi^2) G_{i_3}(x, x') = 4 \frac{\text{sen } \chi(x_0 - x'_0)}{x_0 - x'_0} \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \quad (126)$$

Esto resulta del hecho que la parte de

$$4\pi \delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3)$$

que proviene de las frecuencias isobaras es la cantidad que está en el miembro derecho de (126), ya que

$$\delta(x_0, x'_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0)] dK_0. \quad (127)$$

La función  $\psi_i(x)$

$$\psi_i(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(x, x') \rho(x') d_4 x' \quad (128)$$

es una solución de la ecuación

$$(\square + \chi^2) \psi_i(x, x') = 4\pi \bar{\rho}(x) \quad (129)$$

$$\bar{\rho}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } \chi(x_0 - x'_0)}{x_0 - x'_0} \rho(x'_0, x_1, x_2, x_3) dx'_0. \quad (130)$$

$\bar{\rho}(x)$  se obtiene de  $\rho(x)$  por una especie de promedio en el tiempo en un intervalo aproximadamente igual a  $\frac{2\pi}{c\chi}$ . Llamaremos distribuciones nucleónicas cuasiestáticas a aquellas cuyos desarrollos de Fourier contienen solamente frecuencias isobaras. Para estas distribuciones

$$\psi_{rel}(x) = \psi_{av}(x) = \psi_i(x), \quad (131)$$

$$\psi_{irr}(x) = 0. \quad (132)$$

La ecuación (131) muestra que  $G_i(x, x')$  puede ser considerada como una función de Green para los campos creados por distribuciones cuasiestáticas.

### 7. — Alcance y velocidad de propagación de las acciones.

Las singularidades de las funciones de Green sobre el cono de luz del punto  $(x)$  son muy importantes, porque dan origen a acciones con velocidad de propagación igual a  $c$ . Efectivamente, obtenemos de (122) y (123) la fórmula de Stückelberg<sup>(4)</sup> y Bhabha<sup>(3)</sup>

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\rho(x')]_{(x'_0=x_0-r)} \frac{d_3 x'}{r} - \\ - \chi \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') \frac{J_1(\chi \sqrt{(x_0-x'_0)^2-r^2})}{\sqrt{(x_0-x'_0)^2-r^2}} d_3 x'. \quad (133)$$

La existencia de acciones con velocidad de propagación igual a  $c$  en un campo cuyo cuanto tiene una masa en reposo finita es muy notable. Estas acciones están representadas por la primera integral del miembro derecho de (133), la segunda integral no depende de los valores de  $\rho(x')$  sobre el cono de luz, que es una variedad tridimensional. Las acciones que provienen de la primera integral de (133) son de largo alcance, ya que son de la misma forma que las acciones retardadas en un campo con cuanto de masa cero. Schrödinger<sup>(5)</sup> ha criticado la separación de las dos clases de acciones dadas por (133), que no muestran claramente el efecto del alcance. La fórmula de Schrödinger

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_0^{x_0-x'_0} \frac{\partial}{\partial r} [r \rho(x')] J_0(\chi \sqrt{(x_0-x'_0)^2-r^2}) d\Omega \quad (134)$$

( $d\Omega$  es el ángulo sólido elemental referido al punto  $(x)$ ) no presenta el mismo inconveniente. (134) resulta inmediatamente de (13) y (20). Tenemos

$$G(x, x') = -\operatorname{sgn}(x'_0 - x_0) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(\bar{r}, x_0 - x'_0) \quad (135)$$

de donde

$$G_{ret}(x, x') = -[1 + \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0)] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(\bar{r}, x_0 - x'_0) \quad (136)$$

$$G_{av}(x, x') = -[-1 + \operatorname{sgn}(x'_0 - x_0)] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(\bar{r}, x_0 - x'_0). \quad (137)$$

Teniendo presente (136) obtenemos

$$\begin{aligned} \psi_{rel}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') G_{re}(x, x') d_4 x' = \\ &= -2 \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_0^{\infty} \bar{r} dr \int \rho(x') \frac{\partial}{\partial r} F(\bar{r}, x_0 - x'_0) d\Omega. \end{aligned} \quad (138)$$

(134) resulta de (138) por integración parcial de la integral del miembro derecho con respecto a  $r$ . De (137) obtenemos una expresión de  $\psi_{av}(x)$  similar a la (134)

$$\psi_{av}(x) = \int_{x_0}^{+\infty} dx'_0 \int_0^{x'_0 - x_0} dr \int \frac{\partial}{\partial r} [r \rho(x')] J_0(\chi \sqrt{(x_0 - x'_0)^2 - r^2}) d\Omega. \quad (139)$$

En el caso dinámico, los efectos del alcance no son tan nítidos como en el caso estático o en el de una vibración isobárica de densidad  $\rho(x)$ . Hemos visto en la sección 4 que las vibraciones con  $k_0$  mayor que  $\chi$  generan campos que no presentan efecto de alcance, pero todas las vibraciones isobaras con  $k_0 > 0$  generan campos con alcances mayores que el alcance estático  $\chi^{-1}$  y que tienden hacia  $\infty$  cuando  $k_0$  tiende a  $\chi$ . Es físicamente evidente que no hay efecto de alcance para el campo total cuando hay emisión de ondas mesónicas: Para obtener un flujo saliente de energía las cantidades del campo mesónico que corresponden a las intensidades del campo electromagnético, deben variar como  $r^{-1}$  en el infinito, siendo  $r$  la distancia del punto donde se calcula el campo a un punto fijo en el interior de la distribución nucleónica (suponemos que la distribución nucleónica tiene una extensión espacial finita). Las fórmulas (69) y (72) muestran que  $\varphi_{rel}(\vec{x}, \vec{K}_0)$  y  $\varphi_{av}(\vec{x}, \vec{K}_0)$  varían realmente como  $r^{-1}$  en el infinito.

Es interesante hacer notar que las frecuencias no isobaras también pueden contribuir a la existencia de efectos de alcance. Esto se ve fácilmente si consideramos un punto fuente que está en reposo en un sistema de referencia de Lorentz. En cualquier otro sistema de referencia del mismo tipo, el punto fuente se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme y la correspondien-

te densidad puede tomarse proporcional a  $\delta(x_1 - V x_0)$ , siendo  $V$  una constante, por una conveniente elección del sistema de coordenadas espacial. El desarrollo de Fourier de  $\rho(x)$  en este sistema de referencia de Lorentz, no contiene frecuencias isobaras, como resulta del desarrollo de Fourier de la función  $\delta$  de Dirac (véase ecuación (127)). Así tenemos un campo con efectos de alcance que no contiene frecuencias isobaras.

8. — *Ondas con energías positiva y negativa.*

Consideremos las dos funciones

$$D^{(+)}(x) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(\vec{K}, \vec{r}) - ik_0 x_0] \frac{d_3 \vec{K}}{k_0} \quad (140)$$

$$D^{(-)}(x) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(\vec{K}, \vec{r}) + ik_0 x_0] \frac{d_3 \vec{K}}{k_0} \quad (141)$$

$D(x)$  puede ser expresado en términos de  $D^{(+)}(x)$  y  $D^{(-)}(x)$ :

$$D(x) = \frac{1}{2} [D^{(+)}(x) - D^{(-)}(x)]. \quad (142)$$

Las funciones  $D^{(\pm)}(x)$  son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + \chi^2) D^{(\pm)}(x) = 0, \quad (143)$$

como se puede ver fácilmente si tenemos presente (140) y (141).  $D^{(\pm)}(x)$  puede ser caracterizada como la solución de (143) que satisface las condiciones iniciales

$$[D^{(\pm)}(x)]_{(x_0=0)} = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(\vec{K}, \vec{r})] \frac{d_3 \vec{K}}{k_0} = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(i\chi r) \quad (144)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_0} D^{(\pm)}(x) \right]_{(x_0=0)} = \pm \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(\vec{K}, \vec{r})] d_3 \vec{K} = \pm 2\pi \delta(\vec{r}). \quad (145)$$

Las funciones  $D^{(\pm)}(x)$  pueden ser expresadas mediante funciones de Hankel:

$$D^{(\pm)}(x) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F^{(\pm)}(r, x_0) \quad (146)$$

$$F^{(+)}(r, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2} H_0^{(2)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & x_0 > r \\ -\frac{1}{2} H_0^{(1)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & r > x_0 > -r \\ -\frac{1}{2} H_0^{(1)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & -r > x_0 \end{cases} \quad (148)$$

$$F^{(-)}(r, x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} H_0^{(1)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & x_0 > r \\ -\frac{1}{2} H_0^{(1)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & r > x_0 > -r \\ \frac{1}{2} H_0^{(2)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) & -r > x_0. \end{cases} \quad (147)$$

Por medio de  $D^{(\pm)}(x)$  podemos formar otra solución real de la ecuación de Klein-Gordon, que tiene gran importancia:

$$D_1(x) = \frac{i}{2} [D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x)]. \quad (149)$$

Esta función es bien conocida y aparece en la teoría del positrón.

$D_1(x)$  es la solución de la ecuación de Klein-Gordon determinada por los valores iniciales

$$[D_1(x)]_{(x_0=0)} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial r} H_0(i\chi r) \quad (150)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_0} D_1(x) \right]_{(x_0=0)} = 0. \quad (151)$$

9. — Hasta ahora hemos considerado la ecuación de Klein-Gordon como referida a un campo de ondas mesónicas. Ahora supondremos que la ecuación de Klein-Gordon está referida a un campo de ondas electrónicas, para investigar la contribución de las ondas con energías negativa y positiva.

Las ecuaciones (140) y (141) muestran que  $D^{(+)}(x)$  está formada por la superposición de ondas planas con energía positiva  $\exp[i(\vec{K}, \vec{r}) - ik_0 x_0]$  mientras que  $D^{(-)}(x)$  está formada por la superposición de ondas con energía negativa

$$\exp[i(\vec{K}, \vec{r}) + ik_0 x_0].$$

La función  $D(x)$  es una solución de la ecuación de Klein-Gordon formada por la superposición de ondas con energías de ambos signos, como resulta de (142).  $D_1(x)$  está también formada por la superposición de ondas con energías negativa y positiva.

Es notable que las funciones  $D^{(\pm)}(x-x')$  no se anulan cuando  $(x')$  está afuera del cono de luz de  $(x)$ , como se ve en las ecuaciones (146), (147) y (148). Por lo tanto las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon representadas por  $D^{(\pm)}(x)$  contienen acciones con velocidades de propagación mayores de  $c$ . Como  $D^{(\pm)}(x)$  son las únicas soluciones invariantes de la ecuación de Klein-Gordon que pueden ser formadas por superposición de ondas planas con el mismo signo de la energía y todas las longitudes de onda posibles, se ve que *es necesario considerar soluciones de la ecuación de Klein-Gordon formadas por la superposición de ondas de ambas energías (negativa y positiva), para evitar acciones con velocidades de propagación mayores de  $c$ .*

De (140) y (141) obtenemos

$$D^{(\pm)}(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{\infty} e^{\pm ik_0 x_0} (e^{iKr} - e^{-iKr}) \frac{dK}{k_0} \quad (152)$$

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}. \quad (153)$$

La ecuación (152) da la descomposición de  $D^{(\pm)}(x)$  en ondas incidentes y emergentes, que corresponden a  $e^{-iKr}$  y  $e^{iKr}$ , respectivamente. Es interesante observar que si aplicamos la interpretación usual a las ondas esféricas de  $D^{(\pm)}(x)$  tendríamos que considerar la onda emergente con energía negativa  $\frac{1}{r} \exp [ik_0 x_0 + iKr]$  como una onda incidente, porque los radios de las esferas cuyos puntos tienen la misma fase, decrecen cuando  $x_0$  crece; la onda de energía negativa incidente  $\frac{1}{r} \exp [ik_0 x_0 - iKr]$  aparece como una onda emergente, con la interpretación usual.

Las expresiones de  $D(x-x')$ ,

$$D(x-x') = \frac{1}{2} [G_{rel}(x, x') - G_{av}(x, x')], \quad (154)$$

$$D(x-x') = \frac{1}{2} [D^{(+)}(x-x') - D^{(-)}(x-x')], \quad (155)$$

que corresponden respectivamente desde los puntos de vista de los campos de ondas mesónicas y electrónicas, corresponden también a diferentes descomposiciones de los campos radiativos en ondas emergentes e incidentes. Mientras en (154) están las ondas emergentes del campo retardado y las ondas incidentes de los campos avanzados, en (155) hay dos clases de ondas emergentes e incidentes originadas en las energías negativas y positivas. La teoría de Dirac de los fotones de energía negativa <sup>(12)</sup> puede ser considerada como una tentativa de introducir una descomposición del tipo (155) en el campo electromagnético.

Las singularidades de  $D^{(\mp)}(x-x')$  en el cono de luz de  $(x)$ , no nos permiten obtener soluciones  $\psi^{(\pm)}(x)$  de la ecuación homogénea de Klein-Gordon referida a una inhomogeneidad  $4\pi \rho(x)$  similar a  $\psi_{irr}(x)$ , y que contenga solamente ondas con energía negativa o positiva. En verdad, una tal solución sería

$$\psi^{(\pm)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} D^{(\pm)}(x-x') \rho(x') d_4 x', \quad (156)$$

pero la integral del miembro derecho de (156) no tiene significado debido a las singularidades de las funciones  $D^{(\pm)}(x-x')$  sobre el cono de luz de  $(x)$ . Para poder dar un significado a la integral de (156) podemos usar integración compleja para la variable  $x_0$ , pero aún usando integración compleja no podemos definir soluciones del tipo  $\psi^{(\pm)}$  formadas solamente por superposición de ondas de energía negativa y positiva.

10. — Las singularidades de  $D^{(\pm)}(x)$  pueden ser convenientemente analizadas por medio de las expresiones  $F^{(\pm)}(r, x_0)$ , similar a aquellas de  $F(r, x_0)$  dadas en la sección 2. Tenemos

$$\begin{aligned} F^{(+)}(r, x_0) &= \frac{1}{4} [1 + \operatorname{sgn}(x_0 - r)] H_0^{(2)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) - \\ &\quad - \frac{1}{4} [1 - \operatorname{sgn}(x_0 - r)] H_0^{(1)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_0 - r) J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) - \frac{i}{2} N_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}). \end{aligned} \quad (157)$$

De manera análoga obtenemos

$$\begin{aligned} F^{(-)}(r, x_0) &= -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_0 + r) J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) - \\ &\quad - \frac{i}{2} N_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}). \end{aligned} \quad (158)$$

De (157) y (158) obtenemos

$$F^{(-)}(r, x_0) = F^{(+)}(r, -x_0). \quad (159)$$

$N_0$  es la función de Neumann de orden cero, de acuerdo con la denominación usada por Courant-Hilbert<sup>(2)</sup>. Es la función de Weber de orden cero, según la denominación de G. N. Watson, que la designa por  $Y_0$ .  $N_0(u)$  tiene una singularidad logarítmica en el punto  $u=0$ .

(160)

$$N_0(u) = \frac{2}{\pi} J_0(u) \cdot \left( \log \frac{u}{2} + C \right) + \text{series de potencias pares en } u$$

$$C = 0,5772157 \dots \text{ (constante de Euler)} \quad (161)$$

Necesitaremos la expresión de la derivada  $\frac{d}{du}N_0(u)$  que se toma generalmente como

$$\frac{d}{du}N_0(u) = N_1(u). \quad (162)$$

$N_1(u)$  es la función de Neumann de primer orden

$$N_1(u) = \frac{2}{\pi} J_1(u) \left( \log \frac{u}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi u} +$$

+ series de potencias impares en  $u$ . (163)

Sin embargo, la fórmula (162) no es adecuada para los métodos simbólicos que estamos usando. Debemos tomar

$$\frac{d}{du}N_0(u) = -N_1(u) - 2i\delta(u). \quad (164)$$

La ecuación (164) resulta inmediatamente de (160) teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{du} \log u = \frac{1}{u} - i\pi\delta(u). \quad (165)$$

Obtenemos de (157) y (158), y teniendo presente (18) y (164)

$$D^{(+)}(x) = \frac{\delta(x_0-r)}{r} - \frac{\chi \operatorname{sgn}(x_0-r)}{2 \sqrt{x_0^2-r^2}} J_1(\chi \sqrt{x_0^2-r^2}) +$$

$$+ \frac{i\chi N_1(\chi \sqrt{x_0^2-r^2})}{2 \sqrt{x_0^2-r^2}} - \delta(x_0^2-r^2). \quad (166)$$

$$D^{(-)}(x) = \frac{\delta(x_0+r)}{r} + \frac{\chi \operatorname{sgn}(x_0+r)}{2 \sqrt{x_0^2-r^2}} J_1(\chi \sqrt{x_0^2-r^2}) +$$

$$+ \frac{i\chi N_1(\chi \sqrt{x_0^2-r^2})}{2 \sqrt{x_0^2-r^2}} - \delta(x_0^2-r^2). \quad (167)$$

Teniendo presente (29) y (30) obtenemos de (166) y (167)

$$D^{(+)}(x-x') = G_{rel}(x, x') + \frac{\chi H_1^{(1)}(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)})}{2 \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} - \delta(\{x^\mu - x'^\mu\}\{x_\mu - x'_\mu\}). \quad (168)$$

$$D^{(-)}(x-x') = G_{av}(x, x') + \frac{\chi H_1^{(1)}(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)})}{2 \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} - \delta(\{x^\mu - x'^\mu\}\{x_\mu - x'_\mu\}). \quad (169)$$

Estas ecuaciones son importantes porque muestran la relación entre las funciones  $D^{(\pm)}(x-x')$  y las funciones de Green para las soluciones avanzada y retardada. También son importantes desde otro punto de vista, ya que muestran las relaciones entre las funciones de Green y la solución fundamental  $V(x, x')$  de la ecuación de Klein-Gordon, por ser

$$V(x, x') = -\frac{\pi\chi N_1(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)})}{2 \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}}. \quad (170)$$

Obtenemos de (168) y (169)

$$D_1(x-x') = iG(x, x') + \frac{i\chi H_1^{(1)}(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)})}{2 \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} - i\delta(\{x^\mu - x'^\mu\}\{x_\mu - x'_\mu\}). \quad (171)$$

Cuando  $\chi=0$ , la solución fundamental se torna

$$[V(x, x')]_{(\chi=0)} = \frac{1}{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)} \quad (172)$$

y

$$[D^{(+)}(x-x')]_{(\chi=0)} = [D(x-x')]_{(\chi=0)} - \frac{i}{\pi} [V(x, x')]_{(\chi=0)} \quad (173)$$

$$[D^{(-)}(x-x')]_{(\chi=0)} = -[D(x-x')]_{(\chi=0)} - \frac{i}{\pi} [V(x, x')]_{(\chi=0)} \quad (174)$$

$$[D_1(x-x')]_{(\chi=0)} = \frac{1}{\pi} [V(x, x')]_{(\chi=0)}. \quad (175)$$

Es importante hacer notar que tenemos siempre

$$D^{(+)}(x-x') = D(x-x') - \frac{i}{\pi} V(x-x') + \text{términos regulares.} \quad (176)$$

$$D^{(-)}(x-x') = -D(x-x') - \frac{i}{\pi} V(x-x') + \text{términos regulares.} \quad (177)$$

$$D_1(x-x') = \frac{1}{\pi} V(x-x') + \text{términos regulares.} \quad (178)$$

Designamos aquí con «términos regulares» a aquellos que no divergen cuando el intervalo entre los puntos  $(x)$  y  $(x')$  se anula. Resulta de (176) y (177) que las integrales del miembro derecho de (156) no tienen significado debido a las singularidades de  $V(x, x')$ . Las singularidades de  $V(x, x')$  no son las mismas en el caso general cuando  $\chi \neq 0$  y en el caso particular cuando  $\chi = 0$ ; esta circunstancia da cuenta de la no validez del principio de Huyghens para campos cuyo cuanto tiene masa finita.

#### 11. — *Funciones de Green en el campo de la integración compleja.*

Schrödinger<sup>(5)</sup> ha demostrado que la solución retardada de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon, que corresponde a un punto fuente en movimiento, puede ser expresada como una integral compleja que contiene a  $\frac{N_1(\chi u)}{u}$ , es decir, la solución fundamental  $V(x, x')$ . El método de Schrödinger puede ser extendido a cualquier clase de inhomogeneidad lo mismo que a otros tipos de soluciones de las ecuaciones inhomogéneas de Klein-Gordon. Veremos que la solución fundamental es una especie de función de Green si se utiliza integración compleja con respecto a la variable tiempo.

Consideremos las integrales  $Y^{(+)}$  e  $Y^{(-)}$ :

$$Y^{(+)} = -\frac{i}{\pi} \int_{(L^+)} V(x, x') \rho(x') dx'_0. \quad (179)$$

$$Y^{(-)} = -\frac{i}{\pi} \int_{(L^-)} V(x, x') \rho(x') dx'_0. \quad (180)$$

$L^+$  y  $L^-$  son los caminos de integración representados en la fig. 2. Teniendo presente (163) y (170) obtenemos

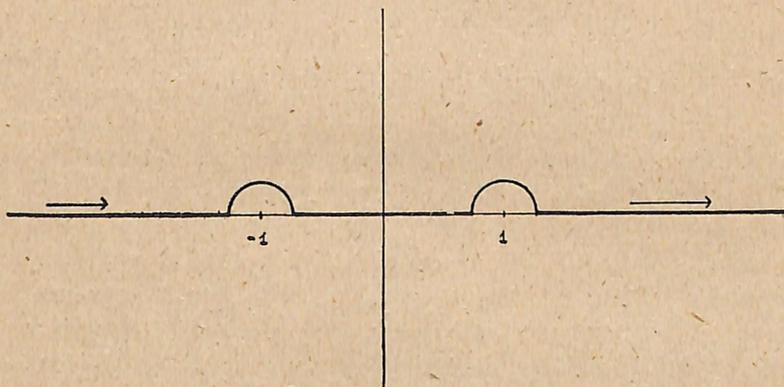


Fig. 2.

$$Y^{(+)} = \chi \int_{-\infty}^{\bar{x}_0} \frac{J_1(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_u - x'_u)})}{\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_u - x'_u)}} \rho(x') dx'_0 - \left[ \frac{\rho(x')}{|r-r'|} \right]_{(x'_0 = \bar{x}_0)}. \quad (181)$$

$$\bar{x}_0 = x_0 - |r-r'|. \quad (182)$$

$$Y^{(-)} = \chi \int_{\bar{\bar{x}}_0}^{+\infty} \frac{J_1(\chi \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_u - x'_u)})}{\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_u - x'_u)}} \rho(x') dx'_0 - \left[ \frac{\rho(x')}{|r-r'|} \right]_{(x'_0 = \bar{\bar{x}}_0)}. \quad (183)$$

$$\bar{\bar{x}}_0 = x_0 + |r-r'|. \quad (184)$$

De donde

$$\psi_{rel}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 x' \int_{(L+)} V(x, x') \rho(x') dx'_0. \quad (185)$$

$$\psi_{av}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 x' \int_{(L-)} V(x, x') \rho(x') dx'_0. \quad (186)$$

Podemos reemplazar en (185) y (186) la función  $V(x, x')$  por alguna otra función  $U(x, x')$  tal, que la diferencia  $V(x, x') - U(x, x')$  sea analítica y regular para todo valor real de  $x'_0$ .

Es notable que no es de ninguna manera necesario que  $\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)} U(x, x')$  sea una función del argumento  $s = \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}$ ; y si es una función de este argumento, no necesariamente debe ser una solución de la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{df}{ds} + \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) f = 0. \quad (187)$$

Las consideraciones precedentes muestran que si tratamos de definir las funciones  $\psi^{(\pm)}(x)$  por medio de integración compleja, en el miembro derecho de (156), tenemos una gran arbitrariedad. En verdad, debemos necesariamente usar integración real con respecto a  $x'_0$  para los términos que provienen de la parte de  $D^{(\pm)}(x-x')$  que se asemeja a  $\delta$ ; por otra parte hay términos que pueden ser integrados por integración compleja o real, pero el resultado depende esencialmente de la clase de integración que se utilice.

Las consideraciones precedentes, referentes a la posibilidad de reemplazar  $V(x, x')$  por otras funciones muestran que tenemos

$$\psi_{rel}(x, x') = i \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 x' \int_{(L+)} D_1(x-x') \rho(x') dx'_0. \quad (188)$$

$$\psi_{av}(x, x') = i \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 x' \int_{(L-)} D_1(x-x') \rho(x') dx'_0. \quad (189)$$

Si ponemos

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots dx'_0 = \int_{(L+)} \dots dx'_0 + \int_{(L-)} \dots dx'_0 \quad (190)$$

obtenemos

$$\psi_{ij}(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(x-x') \rho(x') dx' \quad (191)$$

El método de obtener soluciones de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon por intermedio de  $V(x, x')$ , está relacionado con el usado por Sommerfeld para la ecuación de D'Alembert<sup>(13)</sup>. Ya hemos visto que la función  $V(x, x')$  se convierte en  $s^{-2} = [(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)]^{-1}$  cuando  $\chi=0$ ; de manera que la fórmula de Sommerfeld puede ser obtenida de (185) colocando  $\chi=0$ . Veremos en la siguiente sección que el método de Sommerfeld puede ser extendido a la ecuación de Klein-Gordon.

12. — Consideremos la ecuación diferencial elíptica

$$(\Delta - \chi^2) \psi = \left( \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial y_\mu^2} - \chi^2 \right) \psi = -4\pi\rho \quad (192)$$

La función  $W(y, y')$

$$W(y, y') = -\frac{\pi\chi}{2} \frac{N_1(\chi R)}{R} \quad (193)$$

$$R = \sqrt{\sum_{\mu=0}^3 (y_\mu - y'_\mu)^2} \quad (194)$$

es una solución de la ecuación

$$(\Delta - \chi^2)W = -4\pi^2 \delta(y_0 - y'_0) \delta(y_1 - y'_1) \delta(y_2 - y'_2) \delta(y_3 - y'_3) \quad (195)$$

Sea  $\Omega$  un volumen del espacio cuatridimensional encerrado por la superficie  $\Sigma$ . Para dos funciones  $\Phi, \psi$  cualesquiera, re-

gulares en  $\Omega$ , tenemos

$$\int_{(\Omega)} (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) d\Omega = \int_{(\Sigma)} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Sigma \quad (196)$$

$n$  = normal exterior a  $\Sigma$ .

Tomemos  $\psi$  como solución de (192) que se anula en el infinito y  $\phi = W(y, y')$ ; el dominio de integración sea todo el espacio cuatridimensional, menos una pequeña esfera  $S$  con centro en el punto  $(y)$  y radio  $\varepsilon$ . Como

$$\left( \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial y'_\mu{}^2} - \chi^2 \right) W(y, y') = 0 \quad (197)$$

en  $\Omega$ , obtenemos de (196) y (192)

$$-4\pi \int_{\Omega} W(y, y') \rho(y') d\Omega = \int_{(S)} \left[ W(y, y') \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} W(y, y') \right] dS. \quad (198)$$

Cuando  $\varepsilon$  tiende hacia cero, el primer término bajo la integral en el miembro derecho de (198) da una contribución nula a la integral, porque la mayor singularidad de  $W(y, y')$  es  $R^{-2}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(S)} \left[ W(y, y') \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} W(y, y') \right] dS \\ = -\psi(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(S)} \frac{2}{R^3} dS = -4\pi^2 \psi(x). \end{aligned} \quad (199)$$

De donde

$$\psi(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(y, y') \rho(y') d_4 y'. \quad (200)$$

La ecuación (195) es una consecuencia evidente de la (200).

La ecuación elíptica (192) se transforma en la ecuación in-

homogénea de Klein-Gordon por el cambio de variables

$$y_0 = ix_0, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3. \quad (201)$$

$W(y, y')$  se transforma en  $V(x, x')$ . Las ecuaciones (185) y (186) se pueden considerar como las formas transformadas de (200).

13. — Podemos usar como funciones de Green para la integración compleja una función sin singularidades logarítmicas  $U(x, x')$

$$U(x, x') = \frac{i\pi\chi}{2} \frac{J_1(\chi |V(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)|)}{V(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)} + \frac{1}{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}. \quad (202)$$

Se ve fácilmente que

$$\psi_{rel}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L+)} U(x, x') \rho(x') dx'_0. \quad (203)$$

$$\psi_{av}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L-)} U(x, x') \rho(x') dx'_0. \quad (204)$$

14. — La función  $\frac{J_1(\chi s)}{s}$ .

Hemos visto que las varias funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon difieren de las correspondientes para la ecuación de D'Alembert en términos que contienen a la función  $\frac{J_1(\chi s)}{s}$ . Como estos términos se refieren precisamente al diferente comportamiento de los campos mesónico y electromagnético es importante examinar las propiedades de  $\frac{J_1(\chi s)}{s}$ .

$\frac{J_1(\chi s)}{s}$  es una solución de la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + \chi^2) \frac{J_1(\chi s)}{s} = 0, \quad (205)$$

que es igual a  $-\frac{\chi}{2}$  sobre el cono de luz de  $(x)$ . De donde resulta que

$$(\square + \chi^2) \left[ \frac{J_1(\chi s)}{4s} (1 + \text{sgn}(s^2)) \right] = \chi \delta(s^2) \quad (206)$$

$$\begin{aligned} (\square + \chi^2) \left[ \frac{J_1(\chi s)}{2s} [1 + \text{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)] \right] = \\ = \chi \frac{\delta(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (207)$$

$$\begin{aligned} (\square + \chi^2) \left[ \frac{J_1(\chi s)}{2s} [1 - \text{sgn}(x_0 - x'_0 + |\vec{r} - \vec{r}'|)] \right] = \\ = \chi \frac{\delta(x_0 - x'_0 + |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (208)$$

Estas fórmulas conducen inmediatamente a la expresión de las funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon; basta tener presente que

$$\square \delta(s^2) = 4\pi \delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \quad (209)$$

No podemos obtener una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon de la forma

$$\psi_{irr}(x) = \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x') d_4 x' \quad (210)$$

porque  $\frac{J_1(\chi s)}{s}$  diverge cuando  $s^2 = -\infty$ . Si limitamos la integración a la región del espacio-tiempo interior a los semiconos

del pasao o del futuro del punto  $(x)$ , o a toda la región interior al cono de luz de  $(x)$  no obtenemos ninguna otra solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon debido a las ecuaciones (206), (207) y (280). Consideremos sin embargo las funciones

$$\bar{\psi}_{irr}^{(+)}(x) = \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + \text{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)] \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x') d_4 x'. \quad (211)$$

$$\bar{\psi}_{irr}^{(-)}(x) = \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \text{sgn}(x_0 - x'_0 + |\vec{r} - \vec{r}'|)] \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x') d_4 x'. \quad (212)$$

Obtenemos de (207) y (208)

$$(\square + \chi^2) \bar{\psi}_{irr}^{(+)}(x) = \chi^2 [\psi_{rel}(x)]_{(\chi=0)}. \quad (213)$$

$$(\square + \chi^2) \bar{\psi}_{irr}^{(-)}(x) = \chi^2 [\psi_{av}(x)]_{(\chi=0)}. \quad (214)$$

De donde

$$\psi_{rel}(x) = \frac{1}{\chi^2} \square \bar{\psi}_{irr}^{(+)}(x) \quad (215)$$

$$\psi_{av}(x) = \frac{1}{\chi^2} \square \bar{\psi}_{irr}^{(-)}(x) \quad (216)$$

$\bar{\psi}_{irr}^{(+)}$   $\bar{\psi}_{irr}^{(-)}$  pueden ser convenientemente expresados por integrales complejas

$$\bar{\psi}_{irr}^{(+)}(x) = \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 x' \int_{(L+)} \frac{J_1(\chi |s|)}{s} \rho(x') dx'_0. \quad (217)$$

$$\bar{\psi}_{irr}^{(-)}(x) = -\frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 x' \int_{(L-)} \frac{J_1(\chi |s|)}{s} \rho(x') dx'_0. \quad (218)$$

$L^+$  y  $L^-$  son los caminos de integración representados en la fig. 2. Las ecuaciones (217) y (218) evidentemente están relacionadas con las (203) y (204).

15. — M. Riesz<sup>(7)</sup> ha dado un método de integración de las ecuaciones de diferenciales parciales hiperbólicas de segundo orden en las cuales aparecen funciones que están vinculadas a las soluciones fundamentales de Hadamard. En el caso de la ecuación de Klein-Gordon la función de Riesz es  $Z^\alpha(x, x')$

$$Z^\alpha(x, x') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(l+1)\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2} - l\right)} \chi^{2l} Z_0^{\alpha+2l}(x, x') \quad (219)$$

$$Z_0^\alpha(x, x') = \frac{2\pi}{H(\alpha)} [(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)]^{\frac{\alpha-1}{2}} = \frac{2\pi}{H(\alpha)} s^{\alpha-1} \quad (220)$$

$$H(\alpha) = \pi 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right). \quad (221)$$

Se ve fácilmente que

$$Z^\alpha(x, x') = \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\frac{s}{\chi}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\frac{\alpha-1}{2}}(\chi s). \quad (222)$$

$Z_0^\alpha(x, x')$  es la función de Riesz para la ecuación de D'Alembert; está relacionada con la solución fundamental mediante esta ecuación

$$Z_0^\alpha(x, x') = \frac{2\pi}{H(\alpha)} \left[ V(x, x') \right]_{(\chi=0)}^{\frac{\alpha-1}{2}}. \quad (223)$$

Se ve inmediatamente que

$$(\square + \chi^2) Z^{\alpha+2} = Z^\alpha. \quad (224)$$

Riesz ha demostrado que

$$[\psi_{rel}(x)]_{(\chi=0)} = I_{rel}^2 \rho(x) \quad (225)$$

$$I_{rel}^{\alpha} \rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)] Z_0^{\alpha}(x, x') \rho(x') d_4 x'. \quad (226)$$

La integral del miembro derecho de (226) tiene significado para valores de  $\alpha$  con parte real mayor que dos, pero si consideramos  $I_{rel}^{\alpha} \rho(x)$  como una función del parámetro complejo  $\alpha$ , puede ser prolongada analíticamente para otros valores de  $\alpha$ . La prolongación analítica para valores con parte real  $R\alpha$  positiva puede ser efectuada por una integración parcial. Efectivamente, pongamos  $\xi = x'_0 - x_0$  y obtendremos

$$s^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-2} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} s^{\alpha-2}. \quad (227)$$

De donde

$$I_{rel}^{\alpha} \rho(x) = \frac{1}{2^{\alpha-2} \left[ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 x' \int_{-\infty}^{-|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{1}{\xi} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} s^{\alpha-2} \right) \rho(x') d\xi. \quad (228)$$

Por integración parcial obtenemos de (228), para  $R\alpha > 2$

$$I_{rel}^{\alpha} \rho(x) = - \frac{1}{2^{\alpha-2} \left[ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 x' \int_{-\infty}^{-|\vec{r}-\vec{r}'|} s^{\alpha-2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho}{\xi} \right) d\xi. \quad (229)$$

Esta fórmula nos permite prolongar analíticamente  $I_{rel}^{\alpha} \rho(x)$  para  $R\alpha > 0$ ; así obtenemos

$$\begin{aligned} I_{rel}^2 \rho(x) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} d_3 x' \int_{-\infty}^{-|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho}{\xi} \right) d\xi = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\rho}{\xi} \right)_{(\xi = -|\vec{r}-\vec{r}'|)} d_3 x' = \\ &= [\psi_{rel}(x)]_{(\chi=0)}. \end{aligned} \quad (230)$$

Podemos escribir fórmulas análogas a la (225), para la ecuación de Klein-Gordon

$$\psi_{rel}(x) = J_{rel}^2 \rho(x) \quad (231)$$

$$\psi_{av}(x) = J_{av}^2 \rho(x). \quad (232)$$

Para valores de  $\alpha$  con parte real mayor que dos

$$J_{rel}^\alpha \rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)] Z^\alpha(x, x') \rho(x') d_4 x' \quad (233)$$

$$J_{av}^\alpha \rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0 + |\vec{r} - \vec{r}'|)] Z^\alpha(x, x') \rho(x') d_4 x'. \quad (234)$$

Para otros valores de  $\alpha$  los funcionales  $J_{rel}^\alpha$  y  $J_{av}^\alpha$  están definidos por prolongación analítica. Así, por ejemplo, obtenemos de (229) y (219)

$$\begin{aligned} J_{rel}^\alpha \rho(x) &= \frac{1}{2^{\alpha-2} \left[ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)] s^{\alpha-2} \\ &\frac{\partial}{\partial x'_0} \left[ \frac{\rho(x')}{x_0 - x'_0} \right] d_4 x' + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)] \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi^{2l}}{H(\alpha+2l)} \frac{s^{\alpha-4+2l}}{\Gamma(l+1) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2} - l\right)} \rho(x') d_4 x'. \quad (235) \end{aligned}$$

Y en forma análoga obtenemos

$$\begin{aligned} J_{av}^\alpha \rho(x) &= \frac{1}{2^{\alpha-1} \left[ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0 + |\vec{r} - \vec{r}'|)] s^{\alpha-2} \\ &\frac{\partial}{\partial x'_0} \left[ \frac{\rho(x')}{x_0 - x'_0} \right] d_4 x' + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0 + |\vec{r} - \vec{r}'|)] \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi^{2l}}{H(\alpha+2l)} \frac{s^{\alpha-4+2l}}{\Gamma(l+1) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2} - l\right)} \rho(x') d_4 x'. \quad (236) \end{aligned}$$

Resulta de (235) y (236) que

$$J_{rel}{}^2 \rho(x) = I_{rel}{}^2 \rho(x) - \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + \text{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|)] \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x') d_4 x' \quad (237)$$

$$J_{av}{}^2 \rho(x) = I_{av}{}^2 \rho(x) - \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \text{sgn}(x_0 - x'_0 + |\vec{r} - \vec{r}'|)] \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x') d_4 x' \quad (238)$$

$$I_{av}{}^\alpha \rho(x) = [J_{av}{}^\alpha \rho(x)]_{(\chi=0)}. \quad (238a)$$

Obtuvimos pues (231) y (232). Hemos demostrado la validez de (231) y (232) haciendo uso de nuestro conocimiento previo de las soluciones avanzada y retardada de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon. Así hemos deducido expresiones de aquellas soluciones del tipo de Riesz, sin usar el método de Riesz. Ahora deduciremos directamente por este método la (231) y (232). Resulta de la definición de los funcionales  $J_{rel}{}^\alpha$  y  $J_{av}{}^\alpha$  que para valores de  $\alpha$  cuya parte real es suficientemente grande

$$(\square + \chi^2) J_{rel}{}^{\alpha+2} \rho(x) = J_{rel}{}^\alpha \rho(x) \quad (239)$$

$$(\square + \chi^2) J_{av}{}^{\alpha+2} \rho(x) = J_{av}{}^\alpha \rho(x), \quad (240)$$

y

$$J_{rel}{}^\alpha J_{rel}{}^\beta \rho(x) = J_{rel}{}^{\alpha+\beta} \rho(x), \quad (241)$$

$$J_{av}{}^\alpha J_{av}{}^\beta \rho(x) = J_{av}{}^{\alpha+\beta} \rho(x). \quad (242)$$

Estas ecuaciones son evidentemente válidas para todos los valores del parámetro  $\alpha$  para el cual podemos definir los funcionales  $J$  por prolongación analítica. Se puede ver que la prolongación analítica es posible cuando  $\alpha = 0$ ; por lo tanto

$$(\square + \chi^2) J_{rel}{}^\alpha \rho(x) = 4\pi \rho(x) \quad (243)$$

$$(\square + \chi^2) J_{av}{}^\alpha \rho(x) = 4\pi \rho(x), \quad (244)$$

como consecuencia de (239) y (240); y

$$J_{re}^0 \rho(x) = 4\pi \rho(x) \quad (245)$$

$$J_{av}^0 \rho(x) = 4\pi \rho(x), \quad (246)$$

como consecuencia de (241) y (242). Así obtenemos (231) y (232).

16. — Las consideraciones precedentes indican que el método de Riesz está basado en la posibilidad de definir el operador unidad y operadores diferenciales, como prolongación analítica de operadores integrales reales con parámetros complejos. Así obtenemos un método que nos permite evitar el uso de la función  $\delta$  de Dirac, y sus derivadas. Para obtener un mejor discernimiento de estas cuestiones consideremos la integral de Riemann-Liouville de orden fraccional

$$Y^\alpha f(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^u f(t) (u-t)^{\alpha-1} dt. \quad (247)$$

Esta representación de  $Y^\alpha$  es válida para valores de  $\alpha$  con parte real positiva, pero puede fácilmente ser extendida a otros valores por prolongación analítica. La prolongación puede ser efectuada por integraciones parciales sucesivas, y conduce a las ecuaciones

$$Y^0 f(u) = f(u) \quad (248)$$

$$Y^{-n} f(u) = \frac{d^n}{du^n} f(u), \quad (249)$$

donde  $n$  es un número entero positivo. Como

$$\int_{-\infty}^{\vec{x}_0 - \left| \begin{smallmatrix} \vec{r} & \vec{r}' \end{smallmatrix} \right|} Z^\alpha(x, x') \rho(x') dx'_0 = \frac{1}{2^{\alpha/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)} \quad (250)$$

$$\int_{-\infty}^{\vec{x}_0 - \left| \begin{smallmatrix} \vec{r} & \vec{r}' \end{smallmatrix} \right|} \left[ \left( x_0 - x'_0 - \left| \begin{smallmatrix} \vec{r} & \vec{r}' \end{smallmatrix} \right| \right) \left( x_0 - x'_0 + \left| \begin{smallmatrix} \vec{r} & \vec{r}' \end{smallmatrix} \right| \right) \right]^{\frac{\alpha-4}{2}} \rho(x') dx'_0 -$$

$$-\frac{1}{2^{\alpha/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\vec{x}_0 - \vec{r} - \vec{r}'} s^{\alpha-4} \left[ \frac{(\chi s)^2}{4\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{(\chi s)^3}{16\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)} + \dots \right] \rho(x') dx'_0$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)} \int_{-\infty}^{\vec{x}_0 - \vec{r} - \vec{r}'} [(x_0 - x'_0 - |r - r'|) (x_0 - x'_0 + |r - r'|)]^{\frac{\alpha-4}{2}} \rho(x') dx'_0 = \\ & = Y^{\frac{\alpha-2}{2}} \left\{ (x_0 - x'_0 + |r - r'|)^{\frac{\alpha-4}{2}} \rho(x') \right\}_{(\vec{x}'_0 = \vec{x}_0 - \vec{r} - \vec{r}')} \end{aligned} \quad (251)$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\vec{x}_0 - \vec{r} - \vec{r}'} Z^\alpha(x, x') \rho(x') dx'_0 = \\ & \frac{1}{2^{\alpha/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left[ Y^{\frac{\alpha-2}{2}} \left\{ (x_0 - x'_0 + |r - r'|)^{\frac{\alpha-4}{2}} \rho(x') \right\}_{(\vec{x}'_0 = \vec{x}_0 - \vec{r} - \vec{r}')} \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\vec{x}_0 - \vec{r} - \vec{r}'} s^{\alpha-4} \left[ \frac{(\chi s)^2}{4\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{(\chi s)^3}{16\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)} + \dots \right] \rho(x') dx'_0 \right] \end{aligned} \quad (252)$$

De donde

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{-\infty}^{\vec{x}_0 - \vec{r} - \vec{r}'} Z^\alpha(x, x') \rho(x') dx'_0 \right]_{(\alpha=2)} = \left[ \frac{\rho(x')}{|r - r'|} \right]_{(\vec{x}'_0 = \vec{x}_0 - \vec{r} - \vec{r}')} - \\ & - \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{\vec{x}_0 - \vec{r} - \vec{r}'} \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x') dx'_0. \end{aligned} \quad (253)$$

Las ecuaciones (248) y (249) muestran que el uso de la prolongación analítica de la integral de Riemann-Liouville conduce a los mismos resultados que se obtienen simbólicamente por

medio de integrales vinculadas a la función  $\delta$  y sus derivadas. Como la forma de Riesz de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon puede ser derivada de las propiedades de las integrales prolongadas de Riemann-Liouville, el método de Riesz puede ser considerado como un resultado del reemplazo de las integrales con funciones  $\delta$ , por aquellas del tipo Riemann-Liouville. Así vemos las profundas analogías entre las ecuaciones (237) y (238) y aquellas obtenidas mediante  $G_{rel}$  y  $G_{av}$ . La ecuación (233) es análoga a la ecuación (23) para las funciones de Green.

17. — Se puede obtener fácilmente generalizaciones de las soluciones de la forma de Riesz.

Sea  $\xi_{re'}(x, x'; \alpha)$  una función regular, de  $\alpha$ , analítica, en un dominio que contiene el valor  $\alpha=0$  y tal que

$$\xi_{rel}(x, x'; \alpha) = \xi_{1,re}(x, x'; \alpha) + \xi_{2,re}(x, x'; \alpha) [1 + \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0 - |r - r'|)]; \quad (254)$$

las funciones  $\xi_{1,rel}$  y  $\xi_{2,rel}$  deben satisfacer las condiciones

$$\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{1,re}(x, x'; \alpha) \rho(x') dx'_0 \right]_{(\alpha=0)} = \left[ \frac{\rho(x')}{|r - r'|} \right]_{(x'_0 - x_0 - |r - r'|)} \quad (255)$$

$$\xi_{2,re}(x, x'; 0) = -\frac{\chi}{4} \frac{J_1(\chi s)}{s}. \quad (256)$$

Resulta

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{re'}(x, x'; \alpha) \rho(x') d_4 x'. \quad (257)$$

Las fórmulas de Riesz corresponden a la elección particular

$$\xi_{1,rel}(x, x'; \alpha) = Z_0^\alpha(x, x') [1 + \operatorname{sgn}(x_0 - x'_0 - |r - r'|)] \quad (258)$$

$$\xi_{2,rel}(x, x'; \alpha) = \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi^{2l} Z_0^{\alpha+2l}}{\Gamma(l+1) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2} - l\right)}. \quad (259)$$

Evidentemente ésta no es la elección más simple de  $\xi_{1,rel}$  y  $\xi_{2,rel}$ .

Podríamos tomar  $\xi_{2,rel}$  independiente de  $\alpha$ .

18. — *Campos creados por fuentes puntuales.*

Hay una relación muy simple entre los campos creados por fuentes puntuales en movimiento y las funciones de Green. Llamemos  $d\tau$  el elemento de línea de universo de la fuente puntual móvil; el correspondiente valor de  $\rho(x)$  lo representaremos por una integral tomada a lo largo de la línea de universo del punto:

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\rho}(\tau) \delta(x_0 - x_0(\tau)) \delta(x_1 - x_1(\tau)) \delta(x_2 - x_2(\tau)) \delta(x_3 - x_3(\tau)) d\tau. \quad (260)$$

La ecuación (35) se transforma, en este caso, en

$$(\square + \chi^2) \psi_\rho = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\rho}(\tau) \prod_{\mu=0}^3 \delta(x_\mu - x_\mu(\tau)) d\tau. \quad (261)$$

Por lo tanto

$$\psi_{\rho,rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{rel}(x, x(\tau)) \bar{\rho}(\tau) d\tau \quad (262)$$

$$\psi_{\rho,av}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{av}(x, x(\tau)) \bar{\rho}(\tau) d\tau \quad (263)$$

$$\psi_{\rho,irr}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x - x(\tau)) \bar{\rho}(\tau) d\tau. \quad (264)$$

Por consiguiente

$$G_{rel}(x, x(\tau)) = \frac{\delta}{\delta\rho(\tau)} \psi_{\rho,rel}(x) \quad (265)$$

$$G_{av}(x, x(\tau)) = \frac{\delta}{\delta\rho(\tau)} \psi_{\rho,av}(x) \quad (266)$$

$$D(x-x(\tau)) = \frac{\delta}{\delta\rho(\tau)} \psi_{\rho,irr}(x). \quad (267)$$

Las funciones  $\psi_{\rho}$  también pueden ser usadas en el caso de una distribución nucleónica continua para obtener las diferentes clases de campos. Escribamos

$$\rho(x) = \overset{\rightarrow}{\rho}(r_0, \tau). \quad (268)$$

$\overset{\rightarrow}{r}_0$  es el vector de posición tridimensional, en el tiempo  $O$ , del elemento nucleónico de distribución que ocupa el punto  $(x)$ ;  $\tau$  es la longitud de arco de la línea de universo de este elemento nucleónico. Evidentemente tenemos

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{rel}(x, \overset{\rightarrow}{r}_0) \overset{\rightarrow}{dr}_0 \quad (269)$$

$$\psi_{av}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{av}(x, \overset{\rightarrow}{r}_0) \overset{\rightarrow}{dr}_0, \quad (270)$$

con

$$\psi_{rel}(x, \overset{\rightarrow}{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{rel}(x, x(\tau)) \overset{\rightarrow}{\rho}(r_0, \tau) \frac{D(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))}{D(x_1(0), x_2(0), x_3(0))} \frac{dx_0}{d\tau} d\tau \quad (271)$$

$$\psi_{av}(x, \overset{\rightarrow}{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{av}(x, x(\tau)) \overset{\rightarrow}{\rho}(r_0, \tau) \frac{D(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))}{D(x_1(0), x_2(0), x_3(0))} \frac{dx_0}{d\tau} d\tau. \quad (272)$$

$\frac{D(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))}{D(x_1(0), x_2(0), x_3(0))}$  es el determinante jacobiano que da

los cambios en la densidad de la distribución nucleónica para un observador en reposo con respecto al elemento nucleónico en cuestión. Las  $\psi(x, r_0)$  son generalizaciones para el caso dinámico general del campo creado por un elemento nucleónico que, en el caso estático es  $\rho(\vec{r}_0) |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \exp[-\chi |\vec{r} - \vec{r}'|]$ .

19. — *La función de Green para campos cuasiestáticos.*

Consideraremos ahora distribuciones nucleónicas tales que en los desarrollos de Fourier de  $\rho(x)$  no haya frecuencias mayores que  $c\chi$ . El campo creado por una tal distribución puede ser llamada un campo cuasiestático. Veremos que es posible dar a la solución correspondiente a un campo cuasiestático una forma que describa convenientemente el pasaje del caso dinámico al estático.

En el caso del campo cuasiestático no hay diferencia entre los campos retardado, avanzado y ligado, de manera que podemos representar la solución de la ecuación (35) por  $\psi(x)$ , sin usar sufijo. Hemos visto que

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{is}(x, x') \rho(x') d_4 x'. \quad (273)$$

Es conveniente reemplazar en (273)  $G_{is}(x, x')$  por su desarrollo de Fourier para obtener una fórmula que muestre claramente la transición al caso estático.

$$G_{is}(x, x') = \frac{1}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} |\vec{r} - \vec{r}'|] dK_0$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} dK_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} |\vec{r} - \vec{r}'|] \rho(x') \frac{d_4 x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (275)$$

Podemos pues escribir

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} dK_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\sqrt{\chi^2 - K_0^2} |\vec{r} - \vec{r}'|] \frac{d_3 x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0)] \rho(x') dx'_0 \quad (276)$$

Cuando  $\rho(x')$  no depende de  $x'_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0)] \rho(x') dx'_0 = \rho(x') \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0)] dx'_0 = 2\pi \rho(x') \delta(K_0), \quad (277)$$

y obtenemos la solución estática de Yukawa

$$\psi_{est}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\chi |\vec{r} - \vec{r}'|] \rho(x') \frac{d_3 x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (278)$$

Resulta de (126) que

$$G_{is}(x, x') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{rel}(x, \bar{x}) \frac{\text{sen } \chi(\bar{x}_0 - x'_0)}{\bar{x}_0 - x'_0} \delta(\bar{x}_1 - x'_1) \delta(\bar{x}_2 - x'_2) \delta(\bar{x}_3 - x'_3) d_4 \bar{x} = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}[\chi \{x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|\}]}{[(x_0 - x'_0) - |\vec{r} - \vec{r}'|] |\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\chi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } \chi(\bar{x}_0 - x'_0)}{\bar{x}_0 - x'_0} \frac{J_1(\chi \sqrt{(\bar{x}_0 - x'_0)^2 - |\vec{r} - \vec{r}'|^2})}{\sqrt{(\bar{x}_0 - x'_0)^2 - |\vec{r} - \vec{r}'|^2}} d(\bar{x}_0 - x_0). \quad (279)$$

La ecuación (279) muestra que  $G_{is}(x, x')$  no diverge sobre el cono de luz de  $(x)$ . Por lo tanto, las frecuencias isobaras no dan origen a acciones con velocidad de propagación igual a  $c$ .

20. — Schrödinger<sup>(5)</sup> ha señalado que las formas (133) y (134) de las soluciones retardadas de la ecuación de Klein-Gordon no indican con claridad la existencia de efectos de alcance y no muestran satisfactoriamente como ocurre la transición de un campo dinámico a uno estático. Podemos obtener una forma de la solución que es conveniente para la discusión de esta transición, separando en la función de Green las contribuciones de las frecuencias isobaras y no isobaras:

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(x, x') \rho(x') d_4x' + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{rel}(x, x') \rho(x') d_4x'. \quad (280)$$

De donde

$$\begin{aligned} \psi_{rel}(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{+\chi} dK_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) - \\ & - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|r - r'|}] \rho(x') \frac{d_4x'}{|r - r'|} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{rel}(x, x') \rho(x') d_4x'. \end{aligned} \quad (281)$$

En forma similar obtenemos

$$\begin{aligned} \psi_{av}(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{+\chi} dK_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iK_0(x_0 - x'_0) - \\ & - \sqrt{\chi^2 - K_0^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|r - r'|}] \rho(x') \frac{d_4x'}{|r - r'|} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{av}(x, x') \rho(x') d_4x'. \end{aligned} \quad (282)$$

En la transición al caso estático, los términos (281) y (282) que contienen a  $\Gamma$  tienden hacia cero, y aquellos que provienen de  $G_i$ , se transforman en la solución de Yukawa (278). Se ve que la transición de un campo general a uno cuasiestático es en realidad más interesante que la transición de un campo cuasiestático a uno estático. La situación no es exactamente igual en el caso de los campos electromagnético y mesónico, porque en un campo electromagnético avanzado o retardado los efec-

tos de radiación desaparecen sólo en el caso estático, mientras que ya desaparecen en los campos mesónico cuasiestáticos. La consideración de los efectos de radiación muestran que en lugar de las descomposiciones (281) y (282), es físicamente más interesante tomar

$$\psi_{ret}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{is}(x, x') \rho(x') d_4x' + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, x') \rho(x') d_4x' + \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-x') \rho(x') d_4x' \quad (283)$$

$$\psi_{av}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{is}(x, x') \rho(x') d_4x' + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, x') \rho(x') d_4x' - \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-x') \rho(x') d_4x'. \quad (284)$$

En las ecuaciones (283) y (284) la parte radiativa que proviene de las frecuencias no isobaras, está separado de las contribuciones no radiativas de estas frecuencias.

Pudimos obtener expresiones de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon que muestran claramente la transición a los campos estáticos, pero no indican convenientemente los efectos de alcance porque estos efectos pueden ser debidos tanto a frecuencias isobaras como a no isobaras, como hemos visto en la sección 7.

### 21. — La función de Green exterior.

Todas las funciones de Green que hemos considerado en las secciones precedentes desaparecen en la parte exterior del cono de luz del punto  $(x)$ . Ahora examinaremos una función de Green que desaparece en el interior del cono de luz  $(x)$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{lig}(x, x') = G(x, x') + \frac{\chi}{2} \frac{J_1(\chi s)}{s} = \delta(s^2) + \\ + \frac{\chi}{4} \frac{J_1(\chi s)}{s} [1 - \text{sgn}(s^2)]. \end{aligned} \quad (285)$$

$J_1(\chi s)$  diverge para  $s=i\infty$ ; pero podemos obtener soluciones de la ecuación (35) por medio de  $\tilde{G}_{lig}(x, x')$  cuando  $\rho(x')$  tiende hacia cero en el contorno del espacio, (de tal manera que

$$\lim_{r' \rightarrow \infty} [1 - \text{sgn}(s^2)] \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x') = 0, \quad (286)$$

y la integral en (287) converge

$$\tilde{\psi}_{lig}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_{lig}(x, x') \rho(x') d_4 x'. \quad (287)$$

Aplicaciones físicas de este tipo de soluciones son desconocidas; sin embargo, son muy interesantes porque describen en forma relativísticamente invariante acciones con velocidad de propagación mayor que  $c$ .

Es importante notar que

$$[\tilde{\psi}_{lig}(x)]_{\chi=0} = [\psi_{lig}(x)]_{\chi=0} \quad (288)$$

Por lo tanto, en el caso de campo de cuanto de masa cero no existe la posibilidad de obtener acciones con velocidad de propagación mayor que  $c$  por medio de una función de Green externa.

Podemos también conseguir una función de Green que desaparece exponencialmente para  $s'=i\infty$  en la región exterior al cono de luz de  $(x)$ .

$$G^+(x, x') = G(x, x') + D_1(x-x'). \quad (289)$$

$G^+(x, x')$  no se anula en el interior del cono de luz de  $(x)$  y tiene singularidades ordinarias sobre este cono de luz, que provienen del término  $D_1(x-x')$ .

No parece ser posible obtener una función de Green de la ecuación de Klein-Gordon que tiende hacia cero exponencialmente para  $r'=\infty$ , en la parte exterior del cono de luz de  $(x)$ , se anula en el interior de este cono de luz y es relativísticamente invariante. Todas las funciones de Green de la ecuación de Klein-

Gordon sólo pueden diferir de  $G(x, x')$  por una solución de la ecuación homogénea; conocemos soamente tres soluciones relativísticamente distintas  $D^{(+)}(x-x')$ ,  $D^{(-)}(x-x')$  y  $\frac{J_1(\chi s)}{s}$ ; y es muy probable que no haya otras. Por medio de estas tres soluciones evidentemente no es posible derivar de  $G(x, x')$  una función de Green que satisfice a las condiciones que le hemos impuesto. Es importante hacer notar a este respecto que  $\frac{J_1(\chi s)}{s}$  no es una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon en todo el espacio cuatridimensional, ya que

$$(\square + \chi^2) \frac{N_1(\chi s)}{s} = -2i\chi \delta(s^2). \quad (290)$$

La ecuación (290) es una consecuencia de la relación

$$-\frac{\chi}{2} \frac{N_1(\chi s)}{s} = D_1 - i \frac{\chi}{4} [1 - \text{sgn}(s^2)] \frac{J_1(\chi s)}{s} \quad (291)$$

que resulta de la expresión de  $D_1$  en términos de funciones cilíndricas y de

$$(\square + \chi^2) \left[ \text{sgn}(s^2) \frac{J_1(\chi s)}{s} \right] = 4\chi \delta(s^2), \quad (292)$$

que es evidentemente equivalente a la ecuación (206).

22. — Resulta de (290) que  $\mathcal{G}(x, x')$

$$\mathcal{G}(x, x') = \delta(s^2) - \frac{i\chi}{2} \frac{N_1(\chi s)}{s}, \quad (294)$$

es una función de Green

$$(\square + \chi^2) \mathcal{G}(x, x') = 4\pi \delta(x_0 - x'_0) \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3). \quad (295)$$

Por lo tanto  $G^{(1)}(x, x')$  y  $G^{(2)}(x, x')$

$$\mathcal{G}^{(1)}(x, x') = \delta(s^2) - \frac{\chi}{2} \frac{H_1^{(1)}(\chi s)}{s}, \quad (296)$$

$$\mathcal{G}^{(2)}(x, x') = \delta(s^2) + \frac{\chi}{2} \frac{H_1^{(2)}(\chi s)}{s}, \quad (297)$$

son también funciones de Green. Estas funciones de Green son notablemente más simples que aquellas consideradas hasta ahora, pero tienen singularidades ordinarias sobre el cono de luz de  $(x)$  y son complejas.

Es importante hacer notar que las funciones  $\frac{N_1(\chi s)}{s}$ ,  $\frac{H_1^{(1)}(\chi s)}{s}$  y  $\frac{H_1^{(2)}(\chi s)}{s}$ , aparte de tener un término que diverge como  $s^{-2}$  sobre el cono de luz, tienen también discontinuidades sobre el cono de luz provenientes de sus términos logarítmicos, porque el argumento de  $s$  salta de 0 a  $\frac{\pi}{2}$  cuando  $(x')$  atraviesa el cono de luz de  $(x)$ . Los términos logarítmicos dan también origen a una divergencia, aparte de la discontinuidad. Todas las funciones de Green que hemos considerado tienen singularidades análogas a  $\delta$  y discontinuidades simples sobre el cono de luz de  $(x)$ , pero no todas tienen divergencias ordinarias. Hemos visto en la sección 2 que las discontinuidades simples y las del tipo  $\delta$  están relacionadas, en el caso de las funciones de Green  $G$ ,  $G_{rel}$  y  $G_{av}$ . Veremos ahora que algo análogo existe también en el caso de  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}^{(1)}$  y  $\mathcal{G}^{(2)}$ . Resulta de (164) que

$$\mathcal{G}(x, x') = \frac{i}{2s} \frac{d}{ds} N_0(\chi s) \quad (298)$$

$$\mathcal{G}^{(1)}(x, x') = \frac{1}{2s} \frac{d}{ds} H_0^{(1)}(\chi s) \quad (299)$$

$$\mathcal{G}^{(2)}(x, x') = -\frac{1}{2s} \frac{d}{ds} H_0^{(2)}(\chi s) \quad (300)$$

$\mathcal{G}(x, x')$  está relacionada con  $\tilde{G}_{lig}(x, x')$  por la ecuación

$$\mathcal{G}(x, x') = \tilde{G}_{lig}(x, x') + iD_1(x-x'). \quad (301)$$

23.— *Acercas de la elección de la solución fundamental.*

Los matemáticos consideran generalmente a  $V(x, x')$  como la solución fundamental de la ecuación de Klein-Gordon. Hemos visto que esto está justificado por una comparación con la ecuación elíptica (192). Sin embargo, la elección de  $V(x, x')$  tiene algunos inconvenientes porque no es una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon. Obtenemos de (290)

$$(\square + \chi^2)V(x, x') = i\pi \chi^2 \delta(s^2). \quad (302)$$

Por lo tanto  $V(x, x')$  no es enteramente la análoga de  $s^{-2}$  para el caso de la ecuación de Klein-Gordon. Parece preferible elegir  $\pi D_1(x, x')$  como solución fundamental, porque es una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon que se convierte en  $s^{-2}$  para  $\chi=0$ . Otra ventaja de esta elección es que la función  $\pi D_1(x-x')$  es real en todo el espacio-tiempo, otra propiedad de  $s^{-2}$  que no posee  $V(x, x')$ .

R E F E R E N C I A S

- (1) J. HADAMARD: *Le problème de Cauchy*. París, 1932.
- (2) COURANT-HILBERT: *Methoden der Mathematischen Physik II*. Berlín.
- (3) H. J. BHABHA: *Proc. Roy. Soc. A*, 172, 384, 1939.
- (4) E. C. C. STÜCKELBERG: *Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève*, 1939. (este trabajo no fué posible obtenerlo en el Brasil, el autor sólo conoce la referencia de Schrödinger acerca de su contenido).
- (5) E. SCHRÖDINGER: *Proc. Roy. Irish Academy A*, 57, v, 1941.
- (6) M. SCHÖNBERG: *Physica*, 5, 553 y 961, 1938.  
*Journal de Physique* 1, 201, 1940.
- (7) M. RIESZ: *L'intégrale de Riemann-Liouville*. París. Gauthiers Villars, 1938.
- (8) W. PAULI: *Rev. Mod. Phy.*, 15, 175, 1943.
- (9) M. SCHÖNBERG: *Phys. Rev.*, 67, 193, 1945.
- (10) P. A. M. DIRAC: *Proc. Cam. Phil.*, 30, 100, 1934.
- (11) J. LEITE LOPES y M. SCHÖNBERG: *Phys. Rev.*, 67, 122, 1945.
- (12) P. A. M. DIRAC: *Proc. Roy. Soc. A.*, 180, 1, 1942.
- (13) A. SOMMERFELD: *En Frank-von Mises II*, Braunschweig, 1935.

S. Paulo. Departamento de Física de la Facultad de Ciencias, 15 de agosto 1946.

NOTA: En un trabajo reciente (*Nature*, June 1, 1946, pág. 734) el profesor Gustafson cita un trabajo de N. E. Fremberg a aparecer en los *Proc. Roy. Soc.* y en el cual el método de Riesz se aplica a la ecuación de Klein-Gordon. El profesor Gustafson utiliza la fórmula (231) que es solamente un caso particular de un resultado general dado en la pág. 17 del trabajo de Riesz (referencia (7)).

(Traducido por J. Balseiro y D. Canals Frau)