

MARIO SCHÖNBERG

SOBRE UMA EXTENSÃO DE CALCULO
ESPINORIAL. (I)

Annaes da Academia Brasileira de Sciencias
— Tomo XIII — N. 2 — 80 de Junho de 1941.

SÓBRE UMA EXTENSÃO DE CÁLCULO ESPINORIAL. (I)

MARIO SCHÖNBERG

Os espinores foram introduzidos para obter todas as representações lineares irreductíveis do grupo das rotações e reviramentos de um espaço euclidiano. Algumas dessas representações já são dadas pelo calculo tensorial, mas existem outras já conhecidas ha muito para o espaço tridimensional e o espaço de Minkowski. Estudando as representações lineares dos grupos simples e semi-simples, Cartan construiu, de um ponto de vista algebrico-analytico, todas as representações irreductíveis e mostrou a existencia dos espinores. Esse facto despertou pouca attenção até a descoberta da equação de Dirac para o electron. Darwin observou que essa equação é relativisticamente invariante apesar das componentes da função de onda não formarem um quadrivector. Recentemente, Cartan estudou uma representação geometrica para um typo particular de espinor, por elle denominado de espinor simples, e mostrou como os numeros hypercomplexos de Clifford-Lipschitz podem ser introduzidos de um modo muito natural.

Na presente serie de trabalhos abordaremos o problema de uma theoria geometrica dos espinores sob um ponto de vista differente do de Cartan. Relacionamos o espinor com as coordenadas projectivas sobre o absoluto do espaço euclidiano considerado. Somos assim conduzidos naturalmente a extender o conceito de espinor aos espaços não euclidianos, em que tambem podemos introduzir um absoluto seguindo os methodos de Cayley e Klein. O grupo conforme de um espaço euclidiano sendo isomorpha ao grupo de rotações e reviramentos de um espaço não euclidiano opportuno obtemos immediatamente uma extensão do calculo espinorial do grupo conforme de um espaço euclidiano.

Deslocamentos e reviramentos euclidianos como projectividades

1. Recordaremos rapidamente as relações entre a theoria dos deslocamentos e reviramentos e a geometria projectiva. Essas

transformações sendo continuas, algebraicas e biunivocas e transformando planos em planos são homographias. Mais precisamente são equiaffinidades porque conservam o plano do infinito e têm determinante ± 1 porque conservam os volumes.

Os deslocamentos e reviramentos conservam as distancias e portanto transformam rectas isotropas em rectas isotropas e cônes isotropos em cônes isotropos. Conservando o plano do infinito e transformando cônes isotropos em cônes isotropos conservam o absoluto, intersecção dos cônes isotropos com o plano do infinito. Obtemos assim a propriedade fundamental dos deslocamentos e reviramentos de serem projectividades que conservam o absoluto. Reciprocamente se demonstra facilmente que qualquer projectividade que conserva o absoluto é uma semelhança, os deslocamentos e reviramentos são simplesmente as semelhanças de razão ± 1 .

Analysemos as homographias que as semelhanças induzem sobre o absoluto. Introduzindo uma coordenada projectiva λ sobre o absoluto, as projectividades sobre o absoluto serão dadas por transformações lineares fraccionarias de λ :

$$(1) \quad \lambda = \frac{\alpha \lambda' + \beta}{\gamma \lambda' + \delta}$$

ou homogeneisando o paramento $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \alpha \lambda_1' + \beta \lambda_2' \\ \lambda_2 = \gamma \lambda_1' + \delta \lambda_2' \end{cases}$$

Geometricamente a introdução do parametro pode ser feita tomando uma esfera e considerando as duas familias de geratrizes rectilíneas que são rectas isotropas. Por cada ponto do absoluto passa uma e só uma recta de cada familia e λ póde ser tomado como o parametro da geratriz de uma das familias que passa pelo ponto considerado do absoluto. A natureza da homographia sobre o absoluto depende da natureza da matriz da substituição (2):

$$(3) \quad H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Convem reduzir H á forma canonica. Para isso observemos que uma semelhança resulta de uma homothetia seguida de um deslocamento. Tomando a origem no centro de homothetia a transformação de coordenadas que lhe corresponde é da forma:

$$(3a) \quad \begin{aligned} x'' &= kx \\ y'' &= ky \\ z'' &= kz \end{aligned}$$

Tomando o eixo dos z na direcção do eixo de rotação do deslocamento, a transformação das coordenadas que lhe corresponde é:

$$(3b) \quad \begin{aligned} x' &= a + x'' \cos \theta + y'' \operatorname{sen} \theta \\ y' &= b - x'' \operatorname{sen} \theta + y'' \cos \theta \\ z' &= c + z'' \end{aligned}$$

donde finalmente:

$$(3c) \quad \begin{aligned} x' &= a + k(x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta) \\ y' &= b - k(x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta) \\ z' &= c + kz \end{aligned}$$

ou em coordenadas homogeneas:

$$(3d) \quad \begin{aligned} \rho x_1' &= ax_4 + k(x_1 \cos \theta + x_2 \operatorname{sen} \theta) \\ \rho x_2' &= bx_4 - k(x_1 \operatorname{sen} \theta - x_2 \cos \theta) \\ \rho x_3' &= cx_4 + kx_3 \\ \rho x_4' &= x_4 \end{aligned}$$

A coordenada projectiva póde sêr introduzida como segue:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma(x_1 + ix_2) &= \lambda_1^2 & \sigma(x_1 - ix_2) &= -\lambda_2^2 \\ \sigma x_3 &= \lambda_1 \lambda_2 & \sigma x_4 &= 0 \\ \sigma^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) &= -\lambda_1^2 \lambda_2^2 + (\lambda_1 \lambda_2)^2 = 0 \end{aligned}$$

A' transformação (3d) dos x corresponde a transformação seguinte dos λ :

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \tau \lambda_1^2 = k e^{+i\theta} \lambda_1'^2 \\
 & \tau \lambda_2^2 = k e^{-i\theta} \lambda_2'^2 \\
 & \tau \lambda_1 \lambda_2 = k \lambda_1' \lambda_2'
 \end{aligned}
 \qquad \lambda = e^{i\theta} \lambda' \qquad (6)$$

A formula (6) mostra que as semelhanças induzem sobre o absoluto projectividades parabolicas na hypothese de θ não sêr multiplo de 2π , caso em que a projectividade sobre o absoluto se reduz á identidade. Veremos em seguida o que representam as projectividades não parabolicas do absoluto.

Projectividades sobre uma esfera real

3. O estudo das rotações e reviramentos em torno de um ponto fixo pode sêr feito de modo conveniente pela analyse das projectividades sobre a esfera de raio 1, com centro no centro das rotações.

As rotações e reviramentos em torno de um ponto fixo induzem projectividades sobre os dois systemas de geratrizes rectilineas das esferas com o centro nesse ponto. As projectividades não degeneradas sobre uma esfera são de dois tipos: as do primeiro conservam os dois systemas de geratrizes rectilineas e as do segundo trocam os dois systemas. Com effeito as duas geratrizes que passam pelo ponto P se transformam nas duas geratrizes que passam por P' , isso mostra que geratrizes de systemas diferentes são transformadas em geratrizes de systemas diferentes. Ora todas as geratrizes do systema I encontram uma geratriz qualquer do systema II e assim o systema I é transformado no systema que contem a transformada da geratriz II considerada, o que demonstra nossa affirmação.

Tomando o centro de rotação como origem de um systema de coordenadas cartesianas orthogonaes as equações dos dois systemas de geratrizes podem sêr postas sob a forma :

$$(7 \text{ I}) \quad \begin{cases} \lambda_1 (x_3 - x_4) + \lambda_2 (x_1 + i x_2) = 0 \\ \lambda_1 (x_1 - i x_2) - \lambda_2 (x_3 + x_4) = 0 \end{cases}$$

$$(7 \text{ II}) \quad \begin{cases} \mu_1 (x_3 - x_4) + \mu_2 (x_1 - i x_2) = 0 \\ \mu_1 (x_1 + i x_2) - \mu_2 (x_3 + x_4) = 0 \end{cases}$$

$$(25) \quad \Omega(y) = \sum_1^{n+1} \epsilon_i y_i^2$$

A equação dessa esfera é:

$$(26) \quad \Omega(y) = 1$$

ou em coordenadas homogêneas:

$$(27) \quad \Phi(Y) = \Omega(Y) - Y_{n+2}^2 = 0$$

Tomando como centro de projecção o ponto de coordenadas $(0, 0, \dots, 0, 1, 1)$ e como plano de projecção o plano $Y_{n+1} = 0$ obtemos uma representação conforme dessa esfera sobre o plano. As coordenadas Y do ponto P da esfera que corresponde ao ponto Q do plano são as coordenadas polysphéricas de Q . Essas coordenadas são homogêneas e superabundantes, estando ligadas pela equação da esfera. Qualquer transformação linear dos $0Y$ conservando a esfera $\Phi = 0$ dá uma representação conforme do espaço euclidiano n -dimensional $Y_{n+1} = 0$ e todas as representações conformes desse espaço poder sêr assim obtidas. Vemos portanto que o grupo conforme de um espaço euclidiano coincide com o grupo das projectividades de um E_{n+1} que conservam a quadrica $\Phi = 0$ e portanto com o grupo dos deslocamentos e reviramentos do S_{n+1} que tem essa quadrica por absoluto:

« O grupo conforme de um E_n de forma fundamental $\Omega(y)$ é identico ao grupo dos deslocamentos e reviramentos do S_{n+1} cujo absoluto é a quadrica $\Omega(Y) - Y_{n+2}^2 = 0$. »

Esse theorema mostra que os espinores de S_{n+1} dão representações lineares do grupo E_n .

Espinores euclidianos quadridimensionaes

10. Os três typos de espaços euclidianos quadridimensionaes de absoluto simplesmente especializado, têm por formas quadraticas fundamentaes:

$$(28) \quad \Omega_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$(29) \quad \Omega_2(x) = x_3^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

$$(30) \quad \Omega_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

O theorema do n. 8 mostra que os espinores desses três espaços têm as mesmas leis de transformações que os espinores dos espaços não euclidianos de absolutos, respectivamente :

$$(31) \quad \Omega_1(x) = 0$$

$$(32) \quad \Omega_2(x) = 0$$

$$(33) \quad \Omega_3(x) = 0$$

Esses espaços foram estudados no n. 7 de modo que podemos applicar aos espaços euclidianos quadridimensionaes os resultados então obtidos :

« Os espinores dos espaços euclidianos quadridimensionaes de absoluto simplesmente especializado têm dois pares de componentes que se transformam separadamente por substituições lineares homogeneas para uma rotação e entre si para um reviramento. As matrizes

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ são, conforme o caso :

- a) Imaginarias unitarias e independentes
- b) Imaginarias conjugadas e unimodulares
- c) Reaes, independentes e unimodulares

Convem precisar no enunciado precedente o sentido da palavra reviramento. As rotações e reviramentos são dadas pelas transformações lineares e homogeneas das coordenadas que conservam a forma quadratica fundamental. Podem sêr obtidas todas pelo producto de symetrias em relação a planos passando pelo centro das rotações e reviramentos. Quando a forma fundamental é indefinida ha dois typos de symetria : symetrias de espaço e symetrias de tempo. As rotações resultam do producto de um numero par de symetrias de espaços por um numero par de symetrias de tempo e os reviramentos de um numero par de symetrias de um typo por um numero impar de symetrias do outro typo. Um producto de um numero impar de symetrias de espaço por um numero impar de symetrias de tempo dá uma pseudo-rotação. Para obter um grupo continuo é preciso excluir as pseudo-rotações.

Grupo conforme tridimensional e espinores

11. A estrutura do grupo conforme de um espaço euclidiano é extremamente simples para $n \geq 2$. O theorema de Liouville-Lie diz que além das semelhanças as únicas transformações conformes de um espaço euclidiano de dimensionalidade superior a 2 são as inversões.

Consideremos uma inversão em relação a origem das coordenadas de um espaço euclidiano tridimensional e de potencia 1. Em coordenadas orthogonaes homogeneas essa inversão é dada pelas formulas :

$$(34) \quad \begin{cases} \rho x_1 = x_1' x_4' \\ \rho x_2 = x_2' x_4' \\ \rho x_3 = x_3' x_4' \\ \rho x_4 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \end{cases}$$

Tomando um unico ponto do infinito a inversão torna-se uma transformação biunivoca sem excepção para os pontos reaes do espaço. Para os pontos imaginarios especialmente para o absoluto surgem certas dificuldades. Poder-se-ia pensar que não havendo plano do infinito já por isso o conceito de absoluto perde qualquer significado, na realidade tal não acontece pois o absoluto si bem que situado sobre o plano do infinito não está no infinito pois a distancia de qualquer ponto a um ponto do absoluto é indeterminada e não infinita. De qualquer modo com a introduccção do absoluto a transformação (34) não fica mais sendo biunivoca.

Essas dificuldades nos levam a abandonar a consideração do absoluto substituindo-a pela dos cones isotropos.

A inversão transforma rectas isotropas em rectas isotropas e portanto a um cone isotropo corresponde outro cone da mesma natureza. Si a potencia da inversão é positiva ha uma esfera real de pontos unidos. Os cones isotropos de vertices sobre essa esfera ficam unidos e portanto a inversão induz uma projectividade sobre suas geratrizes. Nessa projectividade ha duas rectas unidas que são as geratrizes da esfera fundamental que passam pelo vertice do cone, não ha outras geratrizes unidas pois deveriam pertencer a esfera fundamental, o que é absurdo. De certo modo podemos dizer que a

essa projectividade corresponde outra sobre o absoluto com dois pontos unidos e assim vemos que as projectividades não parabolicas do absoluto estão ligadas a inversões.

« As inversões em relação a uma esfera real induzem projectividades com duas geratrizes unidas sobre os cones isotropos de vertice sobre a esfera fundamental ».

As relações entre o grupo conforme de E_n e o grupo dos deslocamentos e reviramentos de um S_{n+1} permitem construir um calculo tensorial e um calculo espinorial para o grupo conforme. A lei de transformação dos vectores é a mesma que para o espaço não euclidiano S_{n+1} e os vectores têm $n+1$ componentes, analogamente ocorre com os espinores. Aliás é mais conveniente ligar os espinores conformes de E_n aos espinores ordinarios de E_{n+2} que tem a mesma quadrica absoluto que o S_{n+1} segundo as ideias do n. 8. Ora um espinor de um E_n de absoluto simplesmente especializado têm 2^p componentes, p sendo $m/2$ ou $m-1/2$ segundo é par ou impar de modo que os espinores conformes de um E_n de absoluto simplesmente especializado têm o dobro das componentes dos espinores ordinarios. Temos portanto o theorema geral :

« Os espinores do grupo conforme de um espaço n -dimensional têm o dobro das componentes dos espinores usuaes ao passo que os vectores só têm uma componente a mais ».

Applicando esse resultado geral ao caso do espaço tridimensional ordinario vemos que os espinores do grupo conforme têm quatro componentes.

Os espinores conforme do espaço de Minkowski têm 8 componentes. Esse resultado é de consideravel interesse para a theoria do proton e do neutron na Mecanica Quantica relativista.