RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XXVI, serie 6ª, 2º sem., fasc. 7-8. - Roma, ottobre 1937-XVI

Sopra una classe di equazioni funzionali

NOTA

DI

M. SCHÖNBERG

ROMA
DOTT. GIOVANNI BARDI
TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1937-XVI

Matematica. — *Sopra una classe di equazioni funzionali.* Nota [1] di M. SCHÖNBERG, presentata dal Socio G. FUBINI.

Si studiano equazioni formate con operatori aventi autofunzioni comuni e commutabili con dei fattori costanti. Considerando dei prodotti funzionali qualsiasi di questi operatori, si esamina un'equazione ottenuta eguagliando a zero una funzione lineare, omogenea ed a coefficienti costanti nei prodotti citati, applicati alla funzione incognita. Si mostra che conoscendo le autofunzioni degli operatori che compaiono nell'equazione si possono trovare soluzioni di questa; il metodo è esteso alle equazioni senza secondo membro, in cui il primo è un polinomio omogeneo, a coefficienti costanti od anche una funzione omogenea qualunque nelle espressioni definite sopra. In certe condizioni si può trattare il caso del primo membro funzione di funzioni omogenee.

Aggiungendo alle equazioni considerate un conveniente secondo membro, si ottengono altre che possono essere trattate collo stesso metodo. In certi casi si presentano fenomeni di risonanza.

Nei casi non lineari è discussa la composizione delle soluzioni ed è messa in evidenza la relazione tra composizione e risonanza.

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1937.

Considerando l'equazione

$$(1) \qquad f(\mathrm{D}) \cdot \psi(x) = \sum a_{\alpha\beta\ldots\varrho}\, \mathrm{D}_1^\alpha \mathrm{D}_2^\beta \cdots \mathrm{D}_r^\varrho \psi(x) + b\psi(x) = 0$$

ove $\psi(x)$ è una funzione delle x, variabili in campi continui o discontinui, D_k sono operatori con autovalori $\lambda_{k,n}$ ed autofunzioni $u_{k,n}$, soddisfacenti la relazione:

$$(2) \qquad \mathrm{D}_k \cdot m\psi(x) = m\mathrm{D}_k \psi(x) \qquad (m \text{ costante}).$$

Possiamo scrivere le autofunzioni senza il primo indice giacchè esse sono comuni a tutte le D_k:

$$(3) \qquad \mathrm{D}_k u_n(x) = \lambda_{k,n} u_n(x).$$

Per

$$(4) \qquad \psi(x) = \mathrm{A}u_n(x)$$

$$(5) \qquad \mathrm{D}_1^\alpha \mathrm{D}_2^\beta \cdots \mathrm{D}_r^\varrho \psi(x) = \mathrm{D}_1^\alpha \mathrm{D}_2^\beta \cdots \mathrm{D}_r^\varrho \mathrm{A}u_n(x) = \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \cdots \lambda_{r,n}^\varrho \cdot \mathrm{A}u_n(x)$$

e

$$(6) \qquad f(\mathrm{D}) \cdot \psi(x) = \left(\sum a_{\alpha\beta\ldots\varrho}\, \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \cdots \lambda_{r,n}^\varrho + b\right) \mathrm{A}u_n(x).$$

La $\psi(x)$ data dalla (4) soddisfa alla (1) se le λ sono legate dalla (7):

$$(7) \qquad f(\lambda_n) = \sum a_{\alpha\beta\ldots\varrho}\, \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \cdots \lambda_{r,n}^\varrho + b = 0.$$

Chiameremo (7) equazione caratteristica. Se gli operatori D_k hanno spettri continui di autovalori, possiamo trovare ∞^{r-1} soluzioni della (7). Per le D_k lineari, combinazioni lineari di soluzioni (4) sono anche soluzioni.

La (1) contiene come casi particolari le equazioni lineari, omogenee a coefficienti costanti differenziali, o a differenze finite, certe equazioni integrali ed altre. Per le equazioni differenziali ritroviamo il classico metodo di Cauchy, d'integrazione con funzioni esponenziali autofunzioni della derivata.

Esaminiamo ora il caso dell'equazione che si ottiene introducendo al secondo membro della (1) la $\sum \mathrm{C}_i u_i$, con C_i costanti (se gli operatori D_k non sono lineari consideriamo un termine soltanto):

$$(8) \qquad f(\mathrm{D}) \cdot \psi = \sum a_{\alpha\beta\ldots\varrho}\, \mathrm{D}_1^\alpha \mathrm{D}_2^\beta \cdots \mathrm{D}_r^\varrho \psi + b\psi = \sum \mathrm{C}_i u_i.$$

Possiamo prendere:

$$(9) \qquad \psi = \sum \frac{\mathrm{C}_i}{f(\lambda_i)}.$$

Se qualcuna delle u_i è soluzione della (7), $f(\lambda) = 0$ e si ha risonanza, a meno che più di una u_i soddisfi la (7).

Se le u formano un sistema completo nel campo delle $\psi(x)$ considerate, possiamo prendere l'equazione

$$(10) \qquad f(D) \cdot \psi(x) = \Phi(x)$$

con $\Phi(x)$ qualunque, svilupparla secondo le $u_i(x)$ e trattare (10) come la (8), discutendo la convergenza caso per caso, nei sviluppi in serie.

Sia $f(z)$ un polinomio omogeneo, a coefficienti costanti, di grado N, nelle $z_{\alpha\beta\ldots\varrho}$:

$$(11) \qquad z_{\alpha\beta\ldots\varrho} = D_1^\alpha D_2^\beta \cdots D_r^\varrho \psi(x)$$

$$(11') \qquad z_{00\ldots 0} = \psi(x).$$

L'equazione

$$(12) \qquad f(z) = \sum a (z_{\alpha_1\beta_1\ldots\varrho_1})^{k_1} (z_{\alpha_2\beta_2\ldots\varrho_2})^{k_2} \cdots (z_{\alpha_l\beta_l\ldots\varrho_l})^{k_l} = 0$$

$$(13) \qquad k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_l = 0$$

per $\psi(x) = Au_n(x)$, prende la forma:

$$(14) \qquad f(z) = \left[\sum a \left(\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_1}\right)^{k_1} \left(\lambda_{1,n}^{\alpha_2} \lambda_{2,n}^{\beta_2} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_2}\right)^{k_2} \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \left(\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_l}\right)^{k_l}\right] (Au_n)^N = 0$$

osservando che:

$$(15) \qquad z_{\alpha\beta\ldots\varrho} = \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \cdots \lambda_{r,n}^\varrho \cdot Au_n(x).$$

Si ha un'equazione caratteristica, analoga alla (7):

$$(16) \qquad \sum a \left(\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_1}\right)^{k_1} \left(\lambda_{1,n}^{\alpha_2} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_2}\right)^{k_2} \cdots \left(\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_l}\right)^{k_l} = 0.$$

Possiamo generalizzare facilmente la (12), basta supporre $f(z)$ omogenea qualunque, di grado di omogeneità N:

$$(17) \qquad f(z) = f\left(\overline{D_1^{\alpha_1} D_2^{\beta_1} \cdots D_r^{\varrho_1} \psi}\,, \overline{D_1^{\alpha_2} D_2^{\beta_2} \cdots D_r^{\varrho_2} \psi}\,, \cdots\right.$$
$$\left. \cdots, \overline{D_1^{\alpha_l} D_2^{\beta_l} \cdots D_r^{\varrho_l} \psi}\right) = 0.$$

Per $\psi(x) = Au_n(x)$:

$$(18) \qquad f(z) = f\left(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_1} Au_n}\,, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_2} \lambda_{2,n}^{\beta_2} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_2} Au_n}\,, \cdots\right.$$
$$\left. \cdots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \lambda_{2,n}^{\beta_l} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_l} Au_n}\right) = 0$$

$f(z)$ è omogenea, quindi:

$$(19)\qquad f(z) = (Au_n)^N f\left(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1}\lambda_{2,n}^{\beta_1}\cdots\lambda_{r,n}^{\varrho_1}}, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_2}\lambda_{2,n}^{\beta_2}\cdots\lambda_{r,n}^{\varrho_2}}, \cdots \right.$$
$$\left. \cdots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l}\lambda_{2,n}^{\beta_l}\cdots\lambda_{r,n}^{\varrho_l}}\right) = 0 .$$

L'equazione caratteristica analoga alle (7) e (15) è, in questo caso:

$$(20)\qquad f(\lambda_n) = f\left(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1}\lambda_{2,n}^{\beta_1}\cdots\lambda_{r,n}^{\varrho_1}}, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_2}\lambda_{2,n}^{\beta_2}\cdots\lambda_{r,n}^{\varrho_2}}, \cdots \right.$$
$$\left. \cdots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l}\lambda_{2,n}^{\beta_l}\cdots\lambda_{r,n}^{\varrho_l}}\right) = 0 .$$

Dal caso dell'equazione (17) passiamo al seguente:

$$(21)\qquad f(z) = f\left(D_1^{\alpha_1} D_2^{\beta_1} \cdots D_r^{\varrho_1}\psi, \cdots, D_1^{\alpha_l} D_2^{\beta_l}\cdots D_r^{\varrho_l}\psi\right) = Cu_i^N .$$

Possiamo prendere

$$(22)\qquad \psi(x) = \left[\frac{C}{f(\lambda_i)}\right]^{\frac{1}{N}} u_i(x) .$$

Per λ_i soluzione della (20) si ha risonanza.

Sia $G(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\sigma)$ una funzione che si annulla per $\chi_1 = \chi_2 = \cdots = \chi_\sigma = 0$, consideriamo l'equazione (23), ove la $f_k(z)$ è omogenea di grado N_k nelle $z_{\alpha\beta\ldots\varrho}$

$$(23)\qquad G(f_1(z), f_2(z), \cdots, f_\sigma(z)) = 0 .$$

Ora otteniamo un sistema caratteristico (25), (24) è la forma della (23) per $\psi = Au_n$

$$(24)\qquad G(\{Au_n\}^{N_1} f_1(\lambda_n), \cdots, \{Au_n\}^{N_\sigma} f_\sigma(\lambda_n)) = 0$$

$$(25)\qquad f_1(\lambda_n) = 0 ,\ f_2(\lambda_n) = 0 \cdots f_\sigma(\lambda_n) = 0 .$$

Se le (25) sono compatibili la Au_n soddisfa alla (23). Un caso particolare della (23) si ha per $G(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\sigma)$ lineare ed omogenea nelle χ, se le $f_k(z)$ sono polinomi del tipo (12) la (23) ha per primo membro un polinomio a coefficienti costanti, che può essere qualsiasi. Per discutere la risonanza prendiamo

$$(26)\qquad G(f_1(z), f_2(z), \cdots, f_\sigma(z)) = G\left(C_1 u_i^{N_1}, C_2 u_i^{N_2}, \cdots, C_\sigma u_i^{N_\sigma}\right)$$

per $\psi = A u_i$:

$$(27) \qquad G\left(\overline{\{Au_i\}^{N_1} f_1(\lambda_i)}, \overline{\{Au_i\}^{N_2} f_2(\lambda_i)}, \cdots, \overline{\{Au_i\}^{N_\sigma} f_\sigma(\lambda_i)}\right) = $$

$$= G\left(C_1 u_1^{N_1}, \cdots, C_\sigma u_i^{N_\sigma}\right).$$

Se il sistema (28) è compatibile, Au_i è soluzione della (25)

$$(28) \qquad A^{N_1} f_1(\lambda_i) = C_1 \qquad A^{N_2} f_2(\lambda_i) = C_2 \cdots A^{N_\sigma} f_\sigma(\lambda_i) = C_\sigma .$$

Si ha risonanza quando λ_i è soluzione del sistema (25).

Finora non abbiamo esaminato la questione della composizione delle soluzioni nei casi non lineari. Supponiamo dapprima, che si abbia degenerazione per l'autovalore λ_n, soluzione della (18) e siano le autofunzioni corrispondenti:

$$(29) \qquad u_n^{(1)}\, u_n^{(2)}\, u_n^{(3)} \cdots u_n^{(k)} \cdots$$

Vediamo che qualunque combinazione lineare delle $u_n^{(1)}$ soddisfa ancora alla (17), se D_k sono lineari, infatti in questo caso:

$$(30) \qquad D_1^\alpha D_2^\beta \cdots D_r^\varrho \left(\sum_i a_i u_n^{(i)}\right) = \sum_i a_i D_1^\alpha D_2^\beta \cdots D_r^\varrho u_n^{(i)} =$$

$$= \sum_i a_i \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \cdots \lambda_{r,n}^\beta u_n^{(i)} = \lambda_{1,n}^\alpha \lambda_{2,n}^\beta \cdots \lambda_{r,n}^\beta \sum_i a_i u_n^{(i)}$$

$$(31) \quad f\left(\sum_i z^{(i)}\right) = f\left(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_1} \sum_i a_i u_n^{(i)}}, \cdots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \lambda_{2,n}^{\beta_l} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_l} \sum_i a_i u_n^{(i)}}\right) =$$

$$= \left(\sum_i a_i u_n^{(i)}\right)^N f\left(\overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_1} \lambda_{2,n}^{\beta_1} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_1}}, \cdots, \overline{\lambda_{1,n}^{\alpha_l} \lambda_{2,n}^{\beta_l} \cdots \lambda_{r,n}^{\varrho_l}}\right) = 0 .$$

Quindi per lo spazio funzionale collegato ad un autovalore si ha superposizione (interferenza), anche in casi non lineari, fatto estremamente notevole.

Per soluzioni non appartenenti allo stesso autovalore, in generale non si ha la possibilità di comporle linearmente. Per orientarci nel caso generale (17), consideriamo il fenomeno di risonanza. Nel caso lineare la legge di composizione delle soluzioni della (1) è la stessa che regge la composizione delle autofunzioni che compaiono nel secondo membro dell'equazione non omogenea (8). L'intuizione fisica suggerisce che il secondo membro rappresenta lo stato di un primo sistema che agisce su un altro e le soluzioni dell'equazione descrivono gli stati del secondo sistema, comandato dal primo. La legge di composizione sarebbe la stessa per il primo e per il secondo sistema. Siamo condotti a ricercare per il caso generale considerato un fatto simile. Indichiamo:

$$(32) \qquad z_{\alpha_i \beta_i \cdots \varrho_i} = \zeta_i .$$

Siano s funzioni ψ_s e le corrispondenti ζ:

$$(33) \quad \left(\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \cdots, \zeta_l^{(1)}\right) \quad \left(\zeta_1^{(2)} \zeta_2^{(2)}, \cdots, \zeta_l^{(2)}\right), \cdots, \left(\zeta_1^{(s)} \zeta_2^{(s)}, \cdots, \zeta_l^{(s)}\right).$$

Le considerazioni sulla risonanza portano a cercare una funzione di composizione $\Phi(\chi_1 \cdots \chi_s)$ soddisfacente alla relazione:

$$(34) \quad f\left(\overline{\Phi\left(\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \cdots, \zeta_1^{(s)}\right), \cdots, \Phi\left(\zeta_l^{(1)}, \zeta_l^{(2)}, \cdots, \zeta_l^{(s)}\right)}\right) =$$
$$= \Phi\left(\overline{f\left(\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \cdots, \zeta_l^{(1)}\right), \cdots, f\left(\zeta_1^{(s)}, \zeta_2^{(s)}, \cdots, \zeta_l^{(s)}\right)}\right)$$

che si annulla per $\chi_1 = \chi_2 = \cdots = \chi_s = 0$. Se le $\psi = A u_k$ sono soluzioni della (21) si ha:

$$(35) \quad \begin{cases} f\left(\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \cdots, \zeta_l^{(1)}\right) = C_1 u_1^N \\ f\left(\zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)}, \cdots, \zeta_l^{(2)}\right) = C_2 u_2^N \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f\left(\zeta_1^{(s)}, \zeta_2^{(s)}, \cdots, \zeta_l^{(s)}\right) = C_s u_s^N \end{cases}$$

e la (34) assume la forma:

$$(36) \quad f\left(\overline{\Phi\left(\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)} \cdots \zeta_1^{(s)}\right), \cdots, \Phi\left(\zeta_l^{(1)}, \zeta_l^{(2)} \cdots \zeta_l^{(s)}\right)}\right) =$$
$$= \Phi\left(C_1 u_1^N, C_2 u_2^N, \cdots, C_s u_s^N\right).$$

Quindi se la funzione di composizione $\Phi(\chi_1, \cdots, \chi_s)$ soddisfa alla (34) il principio di risonanza risulta verificato.

Fissando la Φ nella (34) si ha un'equazione funzionale nella $f(\zeta_1, \cdots, \zeta_s)$, per Φ lineare si ottiene la nota equazione:

$$(37) \quad f\left(\overline{\sum_i b_i \zeta_1^{(i)}, \sum_i b_i \zeta_2^{(i)}, \cdots, \sum b_i \zeta_l^{(i)}}\right) = \sum b_i f\left(\zeta_1^{(i)}, \zeta_2^{(i)}, \cdots, \zeta_s^{(i)}\right).$$

dalla quale si vede che anche $f(\zeta_1 \cdots \zeta_s)$ è lineare.

Ringrazio il prof. Wataghin per le discussioni.