RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XXVI, serie 6ª, 2º sem., fasc. 5-6. - Roma, settembre 1937-XV

Sulla funzione $\delta(x)$ di Dirac

NOTA
DI
M. SCHÖNBERG

ROMA
DOTT. GIOVANNI BARDI
TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1937-XV

Matematica. — *Sulla funzione* $\delta(x)$ *di Dirac.* Nota II [1] di M. SCHÖNBERG, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota precedente è stata esaminata la possibilità di sostituire la $\delta(x)$ di Dirac e sua derivata con gli integrali di Stieltjes. Nella presente Nota facciamo vedere che il metodo può essere esteso alle derivate di ordine superiore. Infine mostriamo la necessità di impiegare due integrazioni per rappresentare le derivate.

Ammessa la continuità delle derivate fino all'ordine n, si verifica facilmente che

$$(1) \quad f^{(n)}(x) = \lim_{\xi \to 0} \frac{\begin{gathered} f(n\xi + x) - nf(\overline{n-1}\,\xi + x) + \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f(\overline{n-2}\,\xi + x) + \cdots + (-1)^n f(x) \end{gathered}}{\xi^n},$$

oppure

$$(2) \quad f^{(n)}(x) = \int \frac{f(n\xi + x) - nf(\overline{n-1}\,\xi + x) + \cdots + (-1)^n f(x)}{\xi^n} \, d\Phi(\xi)$$

ove $\Phi(x)$ è la funzione definita nella Nota precedente:

$$(3) \qquad \Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{per} \quad x < 0 \\ 0 & \text{per} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per} \quad x > 0 . \end{cases}$$

Orbene possiamo scrivere:

$$(4) \qquad \frac{f(\eta\xi + x) - nf(\overline{n-1}\,x) + \cdots + (-1)^n f(x)}{\xi^n} = $$

$$= \int f(\eta)\, d_\eta \Psi_n(\eta - x, \xi)$$

ove

$$(5) \quad \Psi_n(\eta, \xi) = \begin{cases} 0 \quad \text{per} \quad \eta < 0 \\ \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^{n-i}}{\xi^n} \binom{n}{n-1} \quad \text{per} \quad r\xi < \eta < \overline{r+1}\,\xi \\ \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^{n-i}}{\xi^n} \binom{n}{n-1} + \frac{(-1)^{n-r}}{2\xi^n} \binom{n}{n-r} \quad \text{per} \quad \eta = r\xi . \end{cases}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1937.

Infatti la (4) segue direttamente dalla definizione (5) di $\Psi_n(\eta, \xi)$, che ha valore costante negli intervalli $(r\xi - \overline{r+1}\,\xi)$ di modo che, solo i punti di discontinuità contribuiscono al valore (4).

Dalle (4) e (1) segue:

$$f^{(n)}(x) = d\Phi(\xi) \int\int f(\eta)\, d_\eta \Psi_n(\eta - x, \xi). \tag{6}$$

Possiamo osservare che Ψ_n può essere rappresentata per mezzo della Φ:

$$\Psi_n(\eta, \xi) = \frac{\begin{matrix}\Phi(\eta\xi - \eta) - n\Phi(\overline{n-1}\,\xi - \eta) + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\Phi(\overline{n-2}\,\xi - \eta) + \cdots + (-1)^n \Phi(\eta)\end{matrix}}{\xi^n}. \tag{7}$$

Dimostriamo ora che non si può rappresentare la derivata di una funzione con una semplice integrazione di Stieltjes applicata alla funzione. Nella dimostrazione di questo teorema adopereremo alcuni risultati utilizzati nel Calcolo delle Probabilità. In questo, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dF(x)$ rappresenta il valor medio di $f(x)$, essendo $F(x)$ la funzione delle probabilità totali, ovunque crescente e positiva. Ricordando che qualunque funzione a variazione limitata è una differenza fra due funzioni crescenti e positive, concludiamo che qualunque integrale di Stieltjes è una combinazione lineare di due integrali del tipo, che rappresenta il valor medio.

Si chiama funzione caratteristica della legge delle probabilità $F(x)$ la funzione $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \int e^{itx}\, dF(x). \tag{8}$$

Notoriamente la conoscenza della funzione caratteristica determina la $F(x)$ avendosi (1):

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{C \to \infty} \int_{-C}^{+C} \varphi(t) \frac{1 - e^{-ixt}}{it}\, dt. \tag{9}$$

Dalle osservazioni precedenti risulta che la teoria delle funzioni caratteristiche è applicabile a qualsiasi integrale di Stieltjes, in particolare la (9) è valida per un qualunque $F(x)$ a variazione limitata.

Supponiamo allora che sia possibile la rappresentazione:

$$f'(x) = \int f(\xi)\, dF(\xi - x). \tag{10}$$

(1) P. Levy, *Calcul des probabilités*, p. 166, 1925.

La funzione caratteristica $\varphi(t)$ corrispondente sarebbe:

$$\varphi(t) = \int e^{it\xi}\, d\,F(\xi) = \left[\frac{d}{d\xi} e^{it\xi}\right]_{\xi=0} = it. \tag{11}$$

Sostituendo (11) in (9) si ha:

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{C\to\infty} \int_{-C}^{+C} (1 - e^{-ixt})\, dt = \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{C\to\infty} \left| t + \frac{e^{-ixt}}{ix} \right|_{-C}^{+C} = \frac{1}{2\pi} \lim_{C\to\infty} \left(2\,C + \frac{2}{x} \operatorname{sen} C\,x\right) = \infty.$$

Concludiamo che non esiste alcuna $F(x)$ che soddisfa la (10), ossia che non è possibile rappresentare la $f'(x)$ con una unica quadratura di Stieltjes applicata alla $f(x)$.

Nel caso delle derivate di ordine n, $\varphi(t)$ diventa $(it)^n$ e l'integrale (12) diverge o è indeterminato.

Ringrazio il prof. Wataghin per le discussioni.