Estratto dal *Nuovo Cimento*, Anno XIII, N. 8
Agosto-Settembre-Ottobre 1936

SULL'INTERAZIONE DEGLI ELETTRONI

Nota di MARIO SCHÖNBERG

Sunto. - *Partendo dall'idea di* DIRAC, *che l'interazione tra gli elettroni risulta dall'azione e reazione tra questi e il campo elettromagnetico quantizzato, si deduce la formola relativistica d'interazione, dovuta a* MOLLER, *applicando il metodo di calcolo preconizzato da* DIRAC.

È nota la possibilità di ottenere la formola relativistica d'interazione di MOLLER [1], coi metodi dell'elettrodinamica quantica [2]. Ciò nonostante, ci sembra non inutile di ottenere questo importante risultato nel modo più semplice.

Applicheremo il metodo di DIRAC [3], adottato da FOCK e PODOLSKY [4] nella deduzione della legge di COULOMB. Useremo le notazioni simili a quelle di questo ultimo lavoro.

Consideriamo il sistema di due elettroni e del campo elettromagnetico descritto da potenziali Φ e $\vec{A}$:

$$(D_1 - ih'\partial/\partial t_1)\psi_1 = \varepsilon_1 V_1 \psi_1, \tag{1}$$

$$(D_2 - ih'\partial/\partial t_2)\psi_2 = \varepsilon_2 V_2 \psi_2, \tag{2}$$

ove

$$D_i = -c(\vec{\alpha_i} \times \vec{p_i} + \beta_i mc), \qquad (i=1, 2) \tag{3}$$

$$V_i = \vec{\alpha_i} \times \vec{A}(\vec{r_i}) - \Phi(\vec{r_i}), \qquad (i=1, 2) \tag{4}$$

h' è la costante di DIRAC $\frac{h}{2\pi}$;

ε_1 e ε_2 sono le cariche delle due particelle;

$\vec{\alpha_i}(\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \alpha_i^{(3)})$ e β_i sono gli operatori di DIRAC;

$\vec{r_i}$ è il raggio vettore della particella i-esima.

Opereremo nello spazio dei momenti, di modo che p_i saranno numeri. Facciamo corrispondere alle soluzioni ψ delle (1) e (2) delle soluzioni φ, funzioni dei momenti e delle variabili dello spin.

(1) C. MOLLER, « Zs. f. Phys. », **70**, 786, 1931.
(2) H. BETHE e E. FERMI, « Zs. f. Phys. », **77**, 296, 1932.
(3) P. A. M. DIRAC, « Proc. Roy. Soc. », **136**, 453, 1932.
(4) V. FOCK e B. PODOLSKY, « Sow. Phys. », **1**, 801, 1932.

Ponendo $t_1 = t_2 = t$ passiamo dalle (1) e (2) all'equazione fondamentale:

$$(D_1 + D_2 - ih'\partial/\partial t)\psi = (\varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2)\psi. \tag{5}$$

Alla ψ in (5) facciamo corrispondere una φ, che supponiamo sviluppata in serie secondo le potenze delle cariche:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \tag{6}$$

È conveniente scrivere (5) nello spazio dei momenti, rappresentando i potenziali al secondo membro con degli integrali di Fourier, contenenti la variabile ausiliaria $\vec{k}$ [1]. Applicando il metodo delle approssimazioni successive otteniamo:

$$\begin{aligned}
&(D_1 + D_2 - ih'\partial/\partial t)\varphi_n(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = \\
&= \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}}\int V_1(\vec{k})\varphi_{n-1}(\vec{p_1} - h'\vec{k}, \vec{p_2})e^{-ic|\vec{k}|t}\,d\vec{k} + \\
&+ \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}}\int V_1^{+}(\vec{k})\varphi_{n-1}(\vec{p_1} + h'\vec{k}, \vec{p_2})e^{ic|\vec{k}|t}\,d\vec{k} + \\
&+ \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}}\int V_2(\vec{k})\varphi_{n-1}(\vec{p_1}, \vec{p_2} - h'\vec{k})e^{-ic|\vec{k}|t}\,d\vec{k} + \\
&+ \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}}\int V_2^{+}(\vec{k})\varphi_{n-1}(\vec{p_1}, \vec{p_2} + h'\vec{k})e^{ic|\vec{k}|t}\,d\vec{k}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Per rappresentare gli stati iniziale e finale dei due elettroni in assenza della radiazione, adoperiamo le soluzioni delle equazioni di Dirac nel vuoto:

$$\psi_0 = \frac{1}{h^3}\, a_0 e^{\frac{i}{h'}(\vec{p_1}^0 \times \vec{r_1} + \vec{p_2}^0 \times \vec{r_2} - W_0)t}\,\delta_{J0}, \tag{8}$$

$$a_0 = \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(1)} \\ a_{0,2}^{(1)} \\ a_{0,3}^{(1)} \\ a_{0,4}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,1}^{(2)} \\ a_{0,2}^{(2)} \\ a_{0,3}^{(2)} \\ a_{0,4}^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$W_0 = W_0^{(1)} + W_0^{(2)}, \tag{10}$$

ove lo spinore a_0 soddisfa le equazioni seguenti:

$$D_1^0 a_0 = W_0^{(1)} a_0, \qquad D_2^0 a_0 = W_0^{(2)} a_0, \tag{11}$$

e δ_{J0} rappresenta lo stato del campo in assenza dei fotoni; per brevità ometteremo δ_{J0}.

D_1^0 e D_2^0 sono gli Hamiltoniani di Dirac con impulsi iniziali.

[1] Cfr. Fock e Podolsky, loc. cit..

La trasformata della ψ_0 è φ_0:

$$\varphi_0 = a_0 \delta(\vec{p_1} - \vec{p_1}^0)\delta(\vec{p_2} - \vec{p_2}^0) e^{-i\frac{W_0}{h'}t}. \tag{12}$$

Calcoliamo φ in prima approssimazione, ossia determiniamo φ_1. Ci sarà utile introdurre le seguenti notazioni abbreviate:

$$\vec{u_1} = \vec{p_1} - \vec{p_1}^0, \qquad \vec{u_2} = \vec{p_2} - \vec{p_2}^0$$

e incominciare colla ricerca delle funzioni $\chi(\vec{k})$ e $\chi^+(\vec{k})$, definite dalle seguenti equazioni:

$$(D_1 + D_2 - h'c|\vec{k}| - W_0)\chi(\vec{k}) = \tag{13}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Big\{ \varepsilon_1 V_1(\vec{k})\delta(\vec{u_1} - h'\vec{k})\delta(\vec{u_2}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 + h'c|\vec{k}|)t} +$$

$$+ \varepsilon_2 V_2(\vec{k})\delta(\vec{u_1})\delta(\vec{u_2} - h'\vec{k}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 + h'c|\vec{k}|)t} \Big\},$$

$$(D_1 + D_2 - h'c|\vec{k}| - W_0)\chi^+(\vec{k}) = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Big\{ \varepsilon_1 V_1^+(\vec{k})\delta(\vec{u_1} + h'\vec{k})\delta(\vec{u_2}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 - h'c|\vec{k}|)t} +$$

$$+ \varepsilon_2 V_2^+(\vec{k})\delta(\vec{u_1})\delta(\vec{u_2} + h'\vec{k}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 - h'c|\vec{k}|)t} \Big\}.$$

Si vede facilmente che:

$$\varphi_1 = \int [\chi(\vec{k}) + \chi^+(\vec{k})] d\vec{k}. \tag{15}$$

Si verifica sostituendo [1] in (13), (14) e ricordando (10) e (11), che χ e χ^+ sono date dalle espressioni seguenti:

$$\chi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Big\{ (D_1 - h'c|\vec{k}| - W_0^{(1)})^{-1} \varepsilon_1 V_1(\vec{k})\delta(\vec{u_1} - h'\vec{k})\delta(\vec{u_2}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 + h'c|\vec{k}|)t} + \tag{16}$$

$$+ (D_2 - h'c|\vec{k}| - W_0^{(2)})^{-1} \varepsilon_2 V_2(\vec{k})\delta(\vec{u_1})\delta(\vec{u_2} - h'\vec{k}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 + h'c|\vec{k}|)t} \Big\},$$

$$\chi^+ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Big\{ (D_1 + h'c|\vec{k}| - W_0^{(1)})^{-1} \varepsilon_1 V_1^+(\vec{k})\delta(\vec{u_1} + h'\vec{k})\delta(\vec{u_2}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 - h'c|\vec{k}|)t} + \tag{17}$$

$$+ (D_2 + h'c|\vec{k}| - W_0^{(2)})^{-1} \varepsilon_2 V_2^+(\vec{k})\delta(\vec{u_1})\delta(\vec{u_2} + h'\vec{k}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 - h'c|\vec{k}|)t} \Big\}.$$

[1] Possiamo scrivere:

$$(D_1 + D_2 - h'c|\vec{k}| - W_0) = (D_1 - h'c|\vec{k}| - W_0^{(1)}) + (D_2 - W_0^{(2)})$$

quindi

$$(D_1 + D_2 - h'c|\vec{k}| - W_0)(D_1 - h'c|\vec{k}| - W_0^{(1)})^{-1} a_0 \delta(\vec{p_2} - \vec{p_2}^0) =$$

$$= a_0 \delta(\vec{p_2} - \vec{p_2}^0) + (D_1 - h'c|\vec{k}| - W_0^{(1)})^{-1}(D_2 - W_0^{(2)}) a_0 \delta(\vec{p_2} - \vec{p_2}^0) = a_0 \delta(\vec{p_2} - \vec{p_2}^0).$$

Sostituendo le espressioni di χ e χ^+ in (15) e effettuando l'integrazione, immediata, grazie alla presenza dei fattori δ si trova:

$$
\begin{aligned}
(18)\quad \varphi_1 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Big\{ & (D_1 - c|\vec{u_1}| - W_0^{(1)})^{-1} \varepsilon_1 V_1\left(\frac{\vec{u_1}}{h'}\right) \delta(\vec{u_1}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 + c|\vec{u_1}|)t} + \\
& + (D_2 - c|\vec{u_2}| - W_0^{(2)})^{-1} \varepsilon_2 V_2\left(\frac{\vec{u_2}}{h'}\right) \delta(\vec{u_1}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 + c|\vec{u_2}|)t} + \\
& + (D_1 + c|\vec{u_1}| - W_0^{(1)})^{-1} \varepsilon_1 V_1^+\left(-\frac{\vec{u_1}}{h'}\right) \delta(\vec{u_2}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 - c|\vec{u_1}|)t} + \\
& + (D_2 + c|\vec{u_1}| - W_0^{(2)})^{-1} \varepsilon_2 V_2^+\left(-\frac{\vec{u_2}}{h'}\right) \delta(\vec{u_1}) a_0 e^{-\frac{i}{h'}(W_0 - c|\vec{u_2}|)t} \Big\}.
\end{aligned}
$$

Per ottenere la seconda approssimazione occorre considerare la equazione:

$$
\begin{aligned}
(19)\quad & (D_1 + D_2 - ih'\partial/\partial t)\varphi_2 = \\
& = \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}} \int V_1(\vec{k}) \varphi_1(\vec{p_1} - h'\vec{k}, \vec{p_2}) e^{-ic|\vec{k}|t} d\vec{k} + \\
& + \frac{\varepsilon_1}{(2\pi)^{3/2}} \int V_1^+(\vec{k}) \varphi_1(\vec{p_1} + h'\vec{k}, \vec{p_1}) e^{ic|\vec{k}|t} d\vec{k} + \\
& + \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}} \int V_2(\vec{k}) \varphi_1(\vec{p_1}, \vec{p_2} - h'\vec{k}) e^{-ic|\vec{k}|t} d\vec{k} + \\
& + \frac{\varepsilon_2}{(2\pi)^{3/2}} \int V_2^+(\vec{k}) \varphi_1(\vec{p_1}, \vec{p_2} + h'\vec{k}) e^{ic|\vec{k}|t} d\vec{k}.
\end{aligned}
$$

Nello studio della (19) avremo bisogno delle regole di commutazione dei potenziali per il caso particolare, in cui un fotone viene emesso e poi assorbito [1]:

$$
(20)\quad \begin{cases}
A_l^+(\vec{k}) A_m(\vec{k'}) \backsim 0, \qquad \Phi(\vec{k})\Phi^+(\vec{k'}) \backsim 0, \\
A_l(\vec{k})\Phi^+(\vec{k'}) = \Phi^+(\vec{k'}) A_l(\vec{k}) \backsim 0, \\
A_l(\vec{k}) A_m^+(\vec{k'}) \backsim \dfrac{ch'}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k} - \vec{k'}) \delta_{lm}, \\
\Phi^+(\vec{k}) \Phi(\vec{k'}) \backsim \dfrac{ch'}{2|\vec{k}|} \delta(\vec{k} - \vec{k'}).
\end{cases}
$$

[1] Le regole di commutazione per le componenti di Fourier $\Phi(\vec{k})$, $\Phi^+(\vec{k})$, $A_l(\vec{k})$ e $A_l^+(\vec{k})$ sono simili a quelle degli operatori di transizione di un quanto, nella seconda quantizzazione. Quindi, i prodotti $\Phi^+\Phi$ e $\Phi\Phi^+$ sono proporzionali a $n_k + 1$ e n_k, n_k essendo il numero di fotoni nello stato $\vec{k}$. Bisogna ricordare che nello stato iniziale non ci sono fotoni, quindi: $n_k = 0$ e $\Phi(\vec{k})\Phi^+(\vec{k'}) \backsim 0$. Per il potenziale vettore, dobbiamo prendere $A_l^+(\vec{k}) A_m(\vec{k'}) \backsim 0$ poichè nelle regole di commutazione il segno è invertito.

Sostituendo (18) in (19), tenendo conto delle (20) e indicando con C i termini che rappresentano l'energia propria delle due particelle, otteniamo facilmente:

$$(21)\qquad (D_1 + D_2 - ih'\partial/\partial t)\varphi_2 = C +$$

$$+ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4\pi}\frac{ch^2}{2\pi}\frac{\delta(\vec{u_1}+\vec{u_2})}{|\vec{u_1}|}\left\{(D_2 + c|\vec{u_2}| - W_0^{(2)}) + (D_1 + c|\vec{u_1}| - W_0^{(1)})\right\}\vec{\alpha_1}\times\vec{\alpha_2}a_0 e^{-\frac{i}{h'}W_0 t} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4\pi}\frac{ch^2}{2\pi}\frac{\delta(\vec{u_1}+\vec{u_2})}{|\vec{u_1}|}\left\{(D_2 - c|\vec{u_2}| - W_0^{(2)}) + (D_1 - c|\vec{u_1}| - W_0^{(1)})\right\}a_0 e^{-\frac{i}{h'}W_0 t}.$$

Per eliminare gli operatori inversi basta osservare che:

$$(D_2 + c|\vec{u_2}| - W_0^{(2)})(D_2 - c|\vec{u_2}| + W_0^{(2)}) = D_2^2 - (W_0^{(2)} - c|\vec{u_2}|)^2,$$
$$D_2^2 = (W_1^{(2)})^2,$$

quindi

$$(22)\qquad (D_2 + c|\vec{u_2}| - W_0^{(2)})^{-1} = \frac{D_2 - c|\vec{u_2}| + W_0^{(2)}}{(W_1^{(2)} - W_0^{(2)} + c|\vec{u_2}|)(W_1^{(2)} + W_0^{(2)} - c|\vec{u_2}|)}.$$

Di conseguenza si ha:

$$(23)\qquad (D_1 + D_2 - ih'\partial/\partial t)\varphi_2 =$$

$$= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4\pi}\frac{ch^2}{2\pi}\frac{\delta(\vec{u_1}+\vec{u_2})}{|\vec{u_1}|}\left\{\frac{D_2 - c|\vec{u_2}| + W_0^{(2)}}{(W_1^{(2)} - W_0^{(2)} + c|\vec{u_2}|)(W_1^{(2)} + W_0^{(2)} - c|\vec{u_2}|)} + \right.$$

$$\left. + \frac{D_1 - c|\vec{u_1}| + W_0^{(1)}}{(W_4^{(1)} - W_0^{(1)} + c|\vec{u_1}|)(W_1^{(1)} + W_0^{(1)} - c|\vec{u_1}|)}\right\}\vec{\alpha_1}\times\vec{\alpha_2}a_0 e^{-\frac{i}{h'}W_0 t} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4\pi}\frac{ch^2}{2\pi}\frac{\delta(\vec{u_1}\times\vec{u_2})}{|\vec{u_1}|}\left\{\frac{D_2 - c|\vec{u_2}| + W_0^{(2)}}{(W_1^{(2)} - W_0^{(2)} - c|\vec{u_2}|)(W_1^{(2)} + W_0^{(2)} + c|\vec{u_2}|)} + \right.$$

$$\left. + \frac{D_1 - c|\vec{u_1}| + W_0^{(1)}}{(W_1^{(1)} - W_0^{(1)} + c|\vec{u_1}|)(W_1^{(1)} + W_0^{(1)} + c|\vec{u_1}|)}\right\}a_0 e^{-\frac{i}{h'}W_0 t}.$$

Dalle (23) si deduce [1] l'espressione dell'elemento di matrice della transizione dello stato iniziale $(\vec{p_1}^0, \vec{p_2}^0)$ allo stato finale $(\vec{p_1}, \vec{p_2})$, moltiplicando e dividendo l'operatore applicato alla a_0, per $\tilde{a}_1$, ove $\tilde{a}_1$

[1] Nelle transizioni considerate, abbiamo:

$$(D_1 + D_2 - ih'\partial/\partial t)\varphi_2 = k\varphi_0 - \int(\vec{p_1}\,\vec{p_2}\,|\,U\,|\,\vec{p_1}'\,\vec{p_2}')\varphi_0(\vec{p_1}'\,\vec{p_2}')d\vec{p_1}'\,d\vec{p_2}'$$

dove U è l'energia d'interazione. L'integrazione si effettua subito:

$$(D_1 + D_2 - ih'\partial/\partial t)\varphi_2 = k\varphi_0 - (\vec{p_1}\,\vec{p_2}\,|\,U\,|\,\vec{p_1}^0\,\vec{p_2}^0)a_0 e^{-\frac{i}{h'}W_0 t}$$

l'operatore applicato a $a_0 e^{-\frac{i}{h'}W_0 t}$ in (23) è infatti l'elemento della matrice U, corrispondente alla transizione considerata.

è l'espressione coniugata e trasposta di a_1, a_1 è lo spinore analogo a a_0, riferito allo stato finale, abbiamo quindi:

$$\tilde{a}_1 D_1 = W_1^{(1)} \tilde{a}_1, \qquad \tilde{a}_1 D_2 = W_2^{(2)} \tilde{a}_1, \tag{24}$$

inoltre è necessario osservare, che assieme alla conservazione dell'impulso, garantita dal fattore δ nella (23), deve risultar verificata anche la conservazione dell'energia:

$$W_1^{(1)} - W_1^{(0)} = W_2^{(0)} - W_2^{(1)}. \tag{25}$$

Eseguendo le operazioni indicate e semplificando, si trova immediatamente l'espressione cercata dell'elemento di matrice:

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4\pi} \frac{h^2}{\pi} \frac{\delta(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)}{|\vec{u}_1|} \frac{1 - \vec{\alpha}_1 \times \vec{\alpha}_2}{\left(\frac{W_1^{(1)} - W_0^{(1)}}{c}\right)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_1^{\,0})^2}. \tag{26}$$

Dall'espressione (26) si ricava ovviamente la formula di MOLLER.

Ringrazio il prof. WATAGHIN d'avermi suggerito l'argomento e aiutato nella ricerca della soluzione.

San Paulo, Instituto de Physica da Universidade.
Luglio 1936.