

SONDERABDRUCK AUS
KOSMISCHE STRAHLUNG
VORTRÄGE, GEHALTEN IM MAX PLANCK-INSTITUT FÜR PHYSIK, GÖTTINGEN
2. AUFLAGE
HERAUSGEGEBEN VON
WERNER HEISENBERG
SPRINGER-VERLAG, BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1953

10. Theorie der Verdampfungsprozesse bei Kernexplosionen.

Von R. HAGEDORN und W. MACKE.

a) Überblick.

Die in den Photoplatten beobachteten „Sterne“ sind vornehmlich als Kernexplosionen zu verstehen, deren Analyse in diesem Abschnitt durchgeführt werden soll. Das Hauptgewicht der Darstellung liegt dabei auf denjenigen Erscheinungen, bei denen leichte Teilchen wie Neutronen,

Protonen und α -Teilchen den Kern verlassen, und die sich als Verdampfungsprozesse des durch ein einfallendes Teilchen stark erhitzten Atomkerns verstehen lassen.

Experimentell beobachtet wurde das Auftreten der Höhenstrahlersterne bislang bei denjenigen Atomarten, welche in den Schichten der Photoplaten, auch in Zählrohr und WILSON-Kammer vorkommen, also z. B. den leichten Atomen C(12), N(14), O(16) in der Gelatine und den mittleren Atomen Br(80) und Ag(107). Die eingeklammerte Zahl gibt die mittlere Nukleonenzahl im Kern an. Darüber hinaus jedoch liegen lediglich Untersuchungen über die Kernexplosionen im Blei Pb(208) vor, bei denen dünne Bleifolien auf die Photoplaten gepreßt sind und die Teilchen beobachtet werden, welche von dort aus die Photoschicht durchqueren [Ho 51a].

Als *sternerzeugende Strahlung* kommen Neutronen (N), Protonen (P) und auch π -Mesonen in Betracht¹. PAGE [Pa 50a] hat festgestellt, daß N und P bei Energien $E > 200$ MeV gleich viel zur Sternerzeugung beitragen, während bei geringeren Energien der Protonenanteil erheblich kleiner ist infolge der Ionisationsverluste in der Atmosphäre.

Der Wirkungsquerschnitt für die Sternerzeugung ist wegen der starken Nukleonenwechselwirkung etwa gleich dem geometrischen Kernquerschnitt.

Dringt nun eins der schnellen Nukleonen in den Kern ein, so gerät es nach einer mittleren Weglänge von etwa 10^{-13} cm in Wechselwirkung mit einem der Kernnukleonen. Dieses nimmt Impuls auf, stößt weitere Nukleonen an und es bildet sich eine *Nukleonenkaskade im Kern* aus, deren Nukleonen sich nach Verlassen des Kerns von den übrigen Spuren durch hohe Energie (≈ 30 MeV) auszeichnen und eine Winkelverteilung aufweisen, welche die Vorwärtsrichtung stark begünstigt. Die Zeitdauer dieses Vorgangs ist auf etwa $R/c \approx 10^{-23}$ sec zu veranschlagen (R = Kernradius). Die Spuren der Protonen in der Photoschicht sind dichter als die Minimumspuren mit $E > Mc^2$, aber dünn gegen die Spuren der verdampften langsameren Teilchen und werden daher auch als „graue Spuren“ bezeichnet¹.

Neben dieser geschilderten direkten Wechselwirkung mit Kernnukleonen erfolgt eine Anregung der übrigen Nukleonen beim Passieren der Kaskade, deren Energie sich im Mittel über alle Freiheitsgrade verteilt. Es findet eine *Erwärmung des Kerns* statt. Die Zeitdauer bis zur Einstellung des thermischen Gleichgewichts ist von TOMONAGA [To 38] auf etwa 10^{-22} sec abgeschätzt worden. Die durch die Nukleonenkaskade bewirkte Anregung beträgt dabei nach Photoplatenstatistiken [Br 49k, Ca 51b] etwa 100 MeV pro grauer Spur.

Bevor jedoch die eigentliche Kernverdampfung im thermodynamischen Gleichgewicht erfolgt, findet eine Anzahl teilweise noch *ungeklärter Zwischenprozesse* statt. Die hohe Anregung des Kerns erlaubt starke Deformationen, bei denen leichtere Kernbruchstücke sich abspalten können und dann einzeln in α -Teilchen zerplatzen. Einen Hinweis in dieser Richtung liefern die Statistiken über die Energieverteilung

¹ Siehe Abschn. 2.

der α 's, welche sich nämlich nur zu einem Teil als Emissionsspektrum im thermischen Gleichgewicht deuten lassen.

Die Emission der leichteren Teilchen (N, P, α, \dots) aus dem angeregten Kern erfolgt mit Zeitkonstanten von 10^{-26} bis 10^{-18} sec[†] erst lange nach Einstellung des thermischen Gleichgewichts und läßt sich daher als *Kernverdampfung* verstehen und beschreiben, analog zur Elektronenemission aus erhitzten Metallen. Diese Prozesse stehen weiterhin im Mittelpunkt der Betrachtungen dieses Abschnitts. Allerdings ist die vom einzelnen verdampften Teilchen mitgeführte Energie hier nicht vernachlässigbar gegen die gesamte Anregungsenergie, so daß nach jeder Emission eine Abkühlung des Kerns stattfindet und ein neues thermisches Gleichgewicht sich einstellen muß, bis schließlich die verfügbare Anregungsenergie nicht mehr ausreicht zur Emission von Teilchen. Erst von diesem Zeitpunkt ab machen sich die langsameren Prozesse wie γ -Emission (ab $\approx 10^{-17}$ sec) und β -Zerfall bemerkbar, über die der Kern erst einen neuen Grundzustand anstrebt und erreicht.

BOHR und KALCKAR [*Bo 37*] haben als erste die Auflösung des Kernverbandes statistisch behandelt, WEISSKOPF [*We 37*] berechnete das Energiespektrum (15) der emittierten Teilchen. BAGGE [*Ba 41*] wandte diese Theorie als erster auf Photoplattensterne an und berücksichtigte dabei die Abkühlung des Kerns während der Verdampfung. Die seinerzeit zur Verfügung stehenden und den Rechnungen von BAGGE zugrundeliegenden Meßergebnisse waren jedoch in mancher Hinsicht noch unvollkommen, so daß ein Teil seiner Schlußfolgerungen heute offenbar nicht mehr haltbar ist. Im folgenden wurde die Theorie weiter verfeinert durch BARDEEN [*Ba 37*] und besonders durch LE COUTEUR [*Le 50a, Le 52a*], an dessen erstzitierte Arbeit sich die folgende Darstellung anlehnt.

b) Einige meßbare Größen in Photoplatten¹.

Bei einer Untersuchung der Kernverdampfungen erhebt sich als erstes die Frage, welche Größen mit der Methode der Plattentechnik überhaupt experimentell zugänglich sind. Eine solche Größe stellt natürlich die Gesamtsternzahl N_{ges} dar und ihre Variation mit der Höhe über dem Meeresspiegel $N_{\text{ges}}(h)$. Bezeichnen wir die Zahl der Spuren eines Sterns mit ν_s , so setzt sich N_{ges} zusammen aus den Sternzahlen mit gegebener *Spurenzahl* $N(\nu_s)$. Nach PAGE [*Pa 50a*] und anderen Autoren ergibt die Sternstatistik einen etwa exponentiellen Zusammenhang zwischen N und ν_s für Ilford C2-Platten (empfindlich für Protonen mit Energien unter 100 MeV)

$$N_{\text{ges}} = \sum_{\nu_s} N(\nu_s); \quad N(\nu_s) \approx N_0 e^{-\xi \nu_s}. \quad (1)$$

Für Sterne mit mehr als 7 Spuren wird $\xi \approx 0,3$ angegeben und $\xi \approx 0,5$ für $3 \leq \nu_s \leq 7$. Dieser höhere Wert bei den kleinen Sternen ist darauf zurückzuführen, daß an den Sternen mit niedrigen Spurenzahlen auch die

† Siehe Gl. (24), S. 210. Denkt man sich die Temperatur konstant, so ist $1/\gamma_x$ die mittlere Zeit zwischen zwei Emissionen bzw. die Zeit zwischen Einstellung des Gleichgewichts und erster Emission.

¹ Vgl. Anh. 3.

leichteren Kerne (C, N, O) der Gelatineschicht beteiligt sind, während die Sterne mit $\nu_s \geq 7$ fast nur noch von den schweren Kernen (Ag, Br) herrühren. Eine vollständige theoretische Behandlung dieses Zusammenhangs existiert zur Zeit noch nicht. Insbesondere bleibt die Frage offen, ob zu dem Zusammenhang (1) in höherem Maße die Energieverteilung der Primärteilchen beiträgt oder die Verteilung der Spurenzahlen bei fester Anregungsenergie. Letztere wurde von LE COUTEUR [Le 52a] berechnet.

Eine erste Verfeinerung der Untersuchungen besteht in einer *Unterscheidung der Spuren* in „graue“ (ν_g) und „schwarze“ (ν) †:

$$N_{\text{ges}} = \sum_{\nu, \nu_g} N(\nu, \nu_g). \quad (2)$$

Insbesondere interessiert die mittlere Zahl der schwarzen Spuren ν bei gegebener Zahl der grauen Spuren ν_g (bezogen auf die ν_g):

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu_g} = \frac{1}{\nu_g} \frac{\sum_{\nu} \nu N(\nu, \nu_g)}{\sum_{\nu} N(\nu, \nu_g)} = f(\nu_g). \quad (3)$$

Dieses Verhältnis ist etwa 3,5 (bei großen ν_g niedriger) und erlaubt bei bekannten Energien der schwarzen Spuren und Berücksichtigung der unsichtbaren emittierten Neutronen eine Abschätzung der Anregungsenergie pro grauer Spur, deren Wert in Abschn. a mit etwa 100 MeV angegeben war. Weiter ist — insbesondere bei denjenigen Spuren, welche in der empfindlichen Schicht enden — eine Unterscheidung der Spuren von einfach, zweifach, usw. geladenen Teilchen möglich, im allgemeinen Protonen und α -Teilchen. Ohne im weiteren die grauen Spuren zu berücksichtigen, da sie nicht zum eigentlichen Verdampfungsprozeß gehören, werden also weiter die Sterne nach ihren α - und P -Spurenzahlen ν_{He} und ν_P , allgemein ν_x , unterschieden, und die mittlere Anzahl der ν_x bei gegebener Anzahl ν_P wird ermittelt in der Größe:

$$\frac{\bar{\nu}_x}{\nu_P} = \frac{1}{\nu_P} \frac{\sum_{\nu_x} \nu_x N(\nu_x, \nu_P)}{\sum_{\nu_x} N(\nu_x, \nu_P)} = f_x(\nu_P). \quad (4)$$

So wurde für (4) der Anteil der α -Teilchen bei Sternen zwischen $\nu_s = 7$ und $\nu_s = 14$ nahezu konstant und etwa gleich 0,5 ermittelt. Der Anteil der mehrfach ionisierenden Spuren ν_x , wie auch der Deutronen, Tritonen usw. ist auch bei Sternen anderer Gesamtpurenzahlen meist kleiner.

Weiter ist die *Energieverteilung* der Spuren von Sternen annähernd gleicher Spurenzahl ausgemessen. Ist ν_x die Gesamtzahl der Spuren der Sorte x , so bedeutet das die Bestimmung der Größe $\nu_x(\varepsilon) d\varepsilon$ innerhalb des Integrals

$$\nu_x = \int \nu_x(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (5)$$

Aus $\nu_x(\varepsilon)$ folgt die Wahrscheinlichkeitsverteilung ω_x und die mittlere Energie $\bar{\varepsilon}_x$ der Teilchen x :

$$\omega_x(\varepsilon) = \frac{\nu_x(\varepsilon)}{\nu_x}; \quad \bar{\varepsilon}_x = \int \varepsilon \omega_x(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (6)$$

† Siehe Abschn. 2a. Man beachte den Unterschied in der Bezeichnungsweise!

Diese experimentellen Größen (1) bis (6) sind im allgemeinen gewonnen im Mittel über verschieden große Sterne und damit verschiedene Anregungsenergien. Zu gegebenen Anregungsenergien, oder wenigstens zu gegebenen Zahlen grauer Spuren liegen noch keine Statistiken vor, da sich ohnehin nur bei einem geringen Teil der Spuren die Energien mit einiger Sicherheit bestimmen lassen. Dadurch wird natürlich eine gewisse Unsicherheit in den zahlenmäßigen Vergleich von Theorie und Experiment hineingetragen.

Die Aufgabe der Theorie besteht nun im folgenden darin, das geschilderte Gesamtverhalten des Kerns bei der Verdampfung im Detail verständlich zu machen.

c) Theorie des einzelnen Verdampfungsprozesses.

α) Die Emissionswahrscheinlichkeit. Vor der Behandlung der Gesamtverdampfung des Kerns mit seiner allmählichen Abkühlung bedarf es der Lösung eines Teilproblems, nämlich der Verdampfung eines einzelnen Teilchens bei gegebenem Kern ($N =$ Neutronen-, $Z =$ Protonenzahl) und gegebener Anregungsenergie. Der *Emissionsprozeß*

$$a \rightarrow e + x(n, z) \quad (7)$$

ist also zu behandeln, bei dem sich ein Kern a durch Emission eines Kernbruchstückes x mit n Neutronen und z Protonen in einen Kern e verwandelt. Dabei ändern sich die den Kern bestimmenden Größen, Neutronenzahl N , Protonenzahl Z und die aus Bindung und Anregung zusammengesetzte Energie E , wie folgt:

$$N_a = N_e + n; \quad Z_a = Z_e + z; \quad E_a = E_e + \varepsilon_x - b_x. \quad (8)$$

Die Größen ε_x und b_x stellen die kinetische und innere Bindungsenergie (im Grundzustande) des herausfliegenden Teilchens dar und sind klein gegen E , wie auch $n \ll N$ und $z \ll Z$ angenommen ist.

In diesem Falle berechnet sich die Emissionswahrscheinlichkeit mit Hilfe der DIRACschen Störungsrechnung¹:

Sind $\varrho_k^e(E_k) dE_k$ bzw. $\varrho_x(E_x) dE_x$ die Anzahlen der Zustände des Kerns e im Energieintervall zwischen E_k und $E_k + dE_k$ bzw. des emittierten Teilchens x zwischen E_x und $E_x + dE_x$, so ist

$$w(E_x) dE_x = \frac{2\pi}{h} H'^2 \varrho_x(E_x) \varrho_k^e(E_a - E_x) dE_x \quad (9)$$

die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, daß ein Teilchen x mit einer Energie zwischen E_x und $E_x + dE_x$ emittiert wird. Dabei ist H' ein Matrixelement, welches den Übergang aus dem Anfangszustand (Kern a) in irgendeinen der Zustände ($e + x(n, z)$) mit der Teilchenenergie E_x in dem angegebenen Intervall und der festen Gesamtenergie $E = E_a$ entspricht. Dabei wird angenommen, daß die zu all diesen Endzuständen gehörenden Matrixelemente H' einander praktisch gleich sind. (9) ist nur anwendbar, wenn der Zustand des angeregten Kerns nicht von

¹ Für das Folgende siehe z. B. [He 44].

seiner Vorgeschichte abhängt, also keine quantenmechanischen Interferenzen zwischen aufeinanderfolgenden Emissionen stattfinden.

Befindet sich das Teilchen im Grundzustand, so ist $E_x = \varepsilon_x - b_x$ und ε_x ist seine kinetische Energie¹. Nach der Emission ist es praktisch frei. Mit einem Normierungsvolumen V (das sich später forthebt), wird also

$$\varrho_x(E_x) = \varrho_x(\varepsilon_x - b_x) = \frac{g_x \cdot V \cdot m_x^2}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{v}{2}. \quad (10)$$

Hier ist $\varepsilon_x = \frac{1}{2} m v^2$ und $g_x = 2s_x + 1$ das statistische Gewicht des Spins s_x . Das Matricelement H' ist schwierig zu berechnen, kann aber eliminiert werden: Für die Einfangwahrscheinlichkeit ω_{einf} des inversen Prozesses, des Teilcheneinfangs, bei dem zum Schluß nur der Kern a vorhanden ist, gilt nämlich die zu (9) analoge Formel mit *demselben* Matricelement H'

$$\omega_{\text{einf}} = \frac{2\pi}{\hbar} H'^2 \varrho_k^a(E_a), \quad (9a)$$

wenn man den Einfangquerschnitt durch

$$\omega_{\text{einf}} = \frac{\sigma \cdot v}{V} \quad (9b)$$

definiert. [Hier ist V dasselbe Volumen wie in (10) und in ihm befindet sich ein Teilchen der Geschwindigkeit v .]

Aus (9) und (9a) eliminiert man H'^2 , setzt für ω_{einf} und ϱ_x die Ausdrücke (9b) und (10) ein und erhält:

$$w_x(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{g_x \cdot \sigma \cdot m_x \cdot \varepsilon d\varepsilon}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{\varrho_k^e(E_a - E_x)}{\varrho_k^a(E_a)}. \quad (11)$$

Das Verhältnis der Termdichten ϱ des Kerns im End- und Anfangszustand läßt sich durch ein statistisch-thermodynamisches Modell des Kerns behandeln. Nach BOLTZMANN ist die Entropie gleich dem Logarithmus der Zahl der Zustände eines Systems und es gilt:

$$\lg \frac{\varrho_e}{\varrho_a} = S_e - S_a = \Delta S.$$

In der Theorie der Kernverdampfung ist es üblich, die BOLTZMANNsche Konstante gleich 1 zu setzen. Die Entropie wird damit dimensionslos und die Temperatur wird in Energieeinheiten (MeV) gemessen. Unter Einführung der freien Energie als Funktion von Volumen, Temperatur und Teilchenzahlen wird

$$\Delta S = \Delta \left(\frac{E - F}{T} \right) = \frac{1}{T} (\Delta E - \Delta F) - \frac{E - F}{T} \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{T} (\Delta E - \Delta F - S \Delta T).$$

Aus $F(V, T, N, Z) = E - TS$ folgt bei fester Teilchenzahl

$$\Delta F = \Delta E - T \Delta S - S \Delta T = -p \Delta V - S \Delta T$$

¹ b_x ist definiert als die innere Bindungsenergie im Grundzustande.

und bei Teilchenaustausch

$$\Delta F(V, T, N, Z) = -p \Delta V - S \Delta T + \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V, T, Z} \cdot \Delta N + \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \right)_{V, T, N} \cdot \Delta Z,$$

also

$$\Delta S = \frac{1}{T} \left[\Delta E + p \Delta V - \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V, T, Z} \Delta N - \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \right)_{V, T, N} \Delta Z \right].$$

Auf den obigen Spezialfall zugeschnitten wird

$$\Delta E = -\varepsilon + b_x; \quad \Delta N = N_e - N_a = -n; \quad \Delta Z = -z.$$

Das Glied $p \Delta V$ ist zu streichen. Bei der später (22) gewählten Darstellung von F , in die E_0 aus (17) eingeht, ist nämlich die Abhängigkeit des Volumens V von der Nukleonenzahl A bereits enthalten, so daß die durch Änderung der Teilchenzahl bedingte Volumenänderung schon bei der Differentiation nach N und Z berücksichtigt ist (im folgenden durch Weglassen der Indizes V, T, N, Z an den Differentialquotienten angedeutet). Das Glied $p \Delta V$ würde dann einer Änderung des Kernvolumens bei fester Nukleonenzahl durch äußere Einflüsse entsprechen, die hier wegfallen. Denn im Gegensatz zur makroskopischen Thermodynamik ist das Kernvolumen kein äußerer Parameter, den man noch in der Hand hat, sondern eine durch den Kern selbst bestimmte Größe.

Damit ergibt sich endgültig die gesuchte Emissionswahrscheinlichkeit

$$w_x(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{g_x \cdot m_x \cdot \sigma \cdot \varepsilon d\varepsilon}{\pi^2 h^3} \cdot e^{\frac{1}{T} \left[-\varepsilon + b_x + n_x \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right) + z_x \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \right) \right]}. \quad (12)$$

Einer näheren Behandlung bedürfen noch σ und F . Der Absorptionsquerschnitt bei Energien von einigen MeV ist für Neutronen praktisch gleich dem geometrischen Querschnitt $\sigma_0 = \pi R^2$; $R = R_0 A^{1/3}$; $R_0 = 1,4 \cdot 10^{-13}$ cm. Bei geladenen Teilchen ist die Absorption durch den Potentialberg behindert, welcher σ_0 verringert. Nach der klassischen Mechanik ergibt sich ein Querschnitt

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_0 \cdot \left(1 - \frac{V_x}{\varepsilon} \right) & \text{für } \varepsilon > V_x \\ 0 & \text{für } \varepsilon < V_x. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Den Tunneleffekt kann man durch eine Abänderung von V_x in $V'_x < V_x$ grob berücksichtigen. Für Ag und Br rechnet man etwa mit den Werten $V'_p \approx 5$ MeV; $V'_x \approx 5,5 \cdot z$ MeV für $z \geq 1$ [außer Proton].

Hier drückt sich die Bevorzugung der kleinen Protonmasse gegenüber z. B. der Deuteronmasse beim Durchdringen des sonst gleichen Potentialwalls ($V \approx 5,5$ MeV) deutlich aus. Für kleine Energien $\varepsilon \approx V_x$ ist diese summarische Behandlung des Tunneleffektes unzureichend [Ha 49b].

Mit dieser Form von σ läßt sich (12) leicht integrieren¹, und die Gesamtwahrscheinlichkeit für Emission eines Teilchens x beträgt:

$$\gamma_x = \int w_x(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{g_x \cdot m_x \cdot \sigma_0 \cdot T^2}{\pi^2 h^3} e^{\frac{1}{T} \left[-V'_x + b_x + n_x \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right) + z_x \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \right) \right]}. \quad (14)$$

¹ Obwohl der Exponent nur das erste Glied einer TAYLOR-Entwicklung von $S_e - S_a$ darstellt, kann man über ε von V'_x bis ∞ integrieren, da die Exponentialfunktion dafür sorgt, daß der Integrand schnell verschwindet, sobald der Exponent groß wird.

Wir berechnen noch die Relativwahrscheinlichkeit ω_x und die mittlere Energie $\bar{\varepsilon}_x$ des emittierten Teilchens:

$$\omega_x(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{w_x(\varepsilon) d\varepsilon}{\gamma_x} = \frac{(\varepsilon - V'_x) d\varepsilon}{T^2} \cdot e^{-\frac{\varepsilon - V'_x}{T}} \quad (14a)$$

für $\varepsilon > V'_x$, sonst $\omega_x(\varepsilon) = 0$ †,

$$\bar{\varepsilon}_x = \int \varepsilon \omega_x(\varepsilon) d\varepsilon = 2T + V'_x. \quad (15)$$

Damit ist aber die Frage der Teilchenemission vollständig zurückgeführt auf die Frage nach der freien Energie des Kerns.

β) Die Thermodynamik des Atomkerns. Die Thermodynamik des Kerns ist bestimmt durch Vorgabe des Zusammenhangs zwischen Energie und Temperatur. Da der Kern infolge seiner hohen Teilchendichte angesehen werden kann als ein stark entartetes System, dessen Temperatur auch bei hoher Anregung noch klein bleibt gegen die Entartungstemperatur, läßt sich der geforderte Zusammenhang durch einen einfachen Potenzansatz annähern

$$E(T) = E_0 + U(T) = E_0 + BT^m \dagger\dagger. \quad (16)$$

Ein FERMI-Gas freier Teilchen ist dabei durch $m = 2$ charakterisiert, ein inkompressibles Flüssigkeitströpfchen mit Oberflächenschwingungen durch $m = \frac{7}{3}$, eine Flüssigkeit mit bloßen Kompressionsschwingungen durch $m = 4$, und ein fester Körper nach DEBYE ebenfalls durch $m = 4$. Eine Auswertung der Statistik über die Kernverdampfung sollte daher die Frage beantworten können, welche Freiheitsgrade des Kerns zur spezifischen Wärme vornehmlich beitragen.

Zunächst allerdings reicht hierzu das vorliegende experimentelle Material noch nicht aus und die weitere Untersuchung soll sich deshalb auf eine Schematisierung des Kerns durch ein FERMI-Gas mit $m = 2$ beschränken.

Die Energie des Grundzustands E_0 wird nach den halbempirischen Beziehungen von G. GAMOW [Ga 30], C. F. v. WEIZSÄCKER [We 35, We 36b] und G. C. WICK [Wi 34] angesetzt mit

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= \left[-14A + 13A^{\frac{2}{3}} + 19,4A \cdot \Theta^2 + 0,584 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{2}}} \right] \text{MeV} \\ A &= N + Z; \quad \Theta = \frac{N - Z}{N + Z} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die stabilen Kerne liegen alle in der Nähe der „Talsohle“, welche durch die Extremalbedingung

$$\left(\frac{\partial E_0}{\partial \Theta} \right)_{\Theta = \Theta_0} = 0 \quad \text{zu} \quad \Theta_0(A) = \frac{1}{1 + 132 \cdot A^{-\frac{2}{3}}} \quad (18)$$

† Die genauere Berücksichtigung des Tunnelleffekts würde bewirken, daß $\omega_x(\varepsilon)$ für $\varepsilon = V'_x$ noch nicht verschwindet. Der Unterschied ist qualitativ gut zu sehen in Abschn. 9, Abb. 2a, S. 183.

†† U_u ist später die Anregungsenergie zu Beginn der regulären Verdampfung.

gegeben ist. In der Nähe der Talsohle (18) gilt, wie eine einfache Entwicklung zeigt, die Formel

$$E_0(A, \Theta) = A[-\alpha(A) + \beta(A) \cdot (\Theta - \Theta_0)^2], \quad (19)$$

wobei α und β nur wenig veränderlich sind und für $A \approx 100$, also Br und Ag, die Werte $\alpha = 8,5$ und $\beta = 22,6$ MeV annehmen.

Die Anregungsenergie eines FERMI-Gases von P Teilchen der Masse m ist

$$\Delta E = \frac{\pi^2 T^2}{4} \cdot \frac{P}{\zeta(P)}; \quad \zeta(P) = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3P}{8V\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$$

ist die Grenzeenergie für $T \rightarrow 0$. Hier wird für Z Protonen und N Neutronen

$$\Delta E = \frac{\pi^2 T^2}{4} \left[\frac{N}{\zeta(N)} + \frac{Z}{\zeta(Z)} \right]; \quad \left\{ \begin{array}{l} N = \frac{A}{2} (1 + \Theta) \\ Z = \frac{A}{2} (1 - \Theta) \end{array} \right\}; \quad \text{für schwere Kerne ist } \Theta \ll 1.$$

Durch Entwicklung um $N = Z = \frac{A}{2}$ findet man mit $V = \frac{4\pi}{3} A \cdot R_0^3$

$$\Delta E = \frac{\pi^2 T^2}{4} \cdot 2 \cdot \frac{A/2}{\zeta(A/2)} \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \Theta^2 \right).$$

Genauer ist aber $V = \frac{4\pi}{3} A \cdot R^3$ mit $R = R_0(1 + b'\Theta^2)$; $b' \approx 0,5$. Für die Berechnung von b' sind spezielle Annahmen über die Kernkräfte erforderlich. Diese Korrektur bedeutet eine Auflockerung der Kerne mit $N \neq Z$. Daher wird wegen $\zeta(P) \sim R^{-2}$

$$\frac{1}{\zeta(P)} = \frac{1}{\zeta_0(P)} \cdot (1 + 2b'\Theta^2) \quad \text{und endlich mit} \quad \zeta_0\left(\frac{A}{2}\right) = \zeta_0$$

$$\Delta E = U(T) = \frac{\pi^2 T^2}{4} \cdot \frac{A}{\zeta_0} (1 + b\Theta^2); \quad b = 2b' - \frac{1}{9} \approx 1.$$

Hier ist ζ_0 die Grenzeenergie für $T \rightarrow 0$ bei $A/2$ Teilchen im Volumen $V = \frac{4\pi}{3} A R_0^3$ mit dem Wert $\zeta_0 = 25$ MeV.

Endgültig wird

$$\left. \begin{array}{l} E(N, Z, T) = A[-\alpha + \beta(\Theta - \Theta_0)^2 + K T^2 (1 + b\Theta^2)] \\ \alpha = 14 - 13A^{-\frac{1}{3}} - \frac{19,4 \cdot A^{\frac{2}{3}}}{132 + A^{\frac{2}{3}}}; \quad \beta = 19,4 + \frac{0,584}{4} A^{\frac{2}{3}}. \end{array} \right\} \quad (20)$$

Aus den vorliegenden Formeln folgt $K = \pi^2/4\zeta_0 \approx 0,1$; $b \approx 1$. Eine genauere Behandlung unter Berücksichtigung der Wechselwirkung der Nukleonen [Ba 37, Le 50a] führt auf $K \approx 0,075$; $b \approx 1,3$. Diese Werte sollen im folgenden benutzt werden.

Die für das Verdampfungsproblem interessierende freie Energie F des Kerns steht nach den Gesetzen der Thermodynamik mit der Energie E in dem Zusammenhang

$$E = F + TS = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N, Z} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) = E_0 + BT^2. \quad (21)$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt durch Integration unter Zuhilfenahme des dritten Hauptsatzes $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$

$$F = E_0 - BT^2 = A[-\alpha + \beta(\Theta - \Theta_0)^2 - KT^2(1 + b\Theta^2)]. \quad (22)$$

Differentiation von (22) nach N und Z liefert die für die Endformeln (12) und (14) benötigten Größen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &\equiv n \frac{\partial F}{\partial N} + z \frac{\partial F}{\partial Z} = (n+z) \frac{\partial F}{\partial A} - \frac{2}{A^2} (zN - nZ) \frac{\partial F}{\partial \Theta} \\ &= -(n+z) \left(\alpha + A \frac{d\alpha}{dA} \right) + (\beta_n \cdot n - \beta_z \cdot z) \cdot 2\beta(\Theta - \Theta_0) - \\ &\quad - KT^2 [(n+z) + 2b\Theta(\delta_n \cdot n - \delta_z \cdot z)]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Dabei sind $\beta_n, \beta_z, \delta_n, \delta_z$ Abkürzungen für Größen, in denen noch $Z, A, \Theta, \Theta_0, \beta$ auftreten. Hier genügt es, $\Theta = \Theta_0$ zu setzen, dann wird

$$\begin{aligned} \beta_n &= \left[\frac{2Z_0}{A} - A \frac{d\Theta_0}{dA} \right]; & \beta_z &= \left[\frac{2N_0}{A} + A \frac{d\Theta_0}{dA} \right]; & N_0 &= \frac{1}{2} A (1 + \Theta_0) \\ \delta_n &= \left[\frac{2Z_0}{A} + \frac{\Theta_0}{2} \right]; & \delta_z &= \left[\frac{2N_0}{A} - \frac{\Theta_0}{2} \right]; & Z_0 &= \frac{1}{2} A (1 - \Theta_0). \end{aligned}$$

Tabelle 1 gibt die in (23) auftretenden Größen für verschiedene Werte von A an.

Tabelle 1.

A	α	$\alpha + A \frac{d\alpha}{dA}$	β	Θ_0	β_n	β_z	δ_n	δ_z
50	8,7	8,77	21,4	0,094	0,85	1,15	0,95	1,05
80	8,5	8,05	22,3	0,129	0,80	1,20	0,94	1,06
100	8,5	7,9	22,6	0,141	0,78	1,22	0,93	1,07
200	7,8	6,4	24,4	0,206	0,69	1,31	0,90	1,10

Die totale Emissionswahrscheinlichkeit für ein Teilchen x bei gegebener Temperatur folgt aus (14) und (23) zu

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= \frac{g_x m_x \sigma_0 T^2}{\pi^2 \hbar^3} e^{-P_x/T - Q_x \cdot T} \\ P_x &= V'_x - b_x + (n_x + z_x) \left(\alpha + A \frac{d\alpha}{dA} \right) - (\beta_n \cdot n_x - \beta_z \cdot z_x) 2\beta(\Theta - \Theta_0) \\ Q_x &= K [(n_x + z_x) + (\delta_n \cdot n_x - \delta_z \cdot z_x) \cdot 2b\Theta]. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

P_x spielt hier also eine ähnliche Rolle wie die Austrittsarbeit bei der Verdampfung der Metallelektronen. Dort fehlt allerdings das Q_x -Glied, weil dort die Änderung der spezifischen Wärme nicht berücksichtigt wird, die mit dem Austritt eines Elektrons aus dem Metall verbunden ist.

Daß dieses Glied mit T geht und bei höheren Temperaturen ein Absinken der Emissionswahrscheinlichkeit bewirkt, liegt an dem Modell des Kerns als eines im Kernvolumen eingeschlossenen FERMI-Gases. Bei den anderen Modellen S. 208 tritt T^λ mit $\lambda > 1$ an Stelle von T .

Daß bei steigender Temperatur die Emission nachläßt, bedeutet mit anderen Worten, daß bei hoher Anregung ein Kern von A Nukleonen ein größeres statistisches Gewicht hat als ein anderer Zustand gleicher Gesamtenergie bestehend aus einem Kern von $A - (n + z)$ Nukleonen und einem Teilchen x von $n + z$ Nukleonen im Grundzustand.

Diese Verhältnisse ändern sich, wenn man die Emission *angeregter* Teilchen $x(n, z)$ berücksichtigt. Zwar wird für einen gegebenen Anregungszustand die Emissionswahrscheinlichkeit kleiner sein als für den Grundzustand (Verkleinerung von $|b_x|$), aber dafür gibt es eben bei zusammengesetzten Teilchen eventuell recht viele angeregte Zustände und zwar um so mehr, je höher die Temperatur des emittierenden Kerns ist. So wird bei zusammengesetzten Teilchen ein teilweise anderer Verlauf als nach Gl. (24) zu erwarten sein. Eine nähere Untersuchung dieser Änderung muß noch durchgeführt werden.

Die hier auftretenden Größen sind für die einzelnen Teilchen in Tabelle 2 zusammengestellt. Die Werte von P_x und Q_x sind für $A = 80$ und $\theta = \theta_0$ hinzugefügt.

Tabelle 2.

$x \rightarrow$	N	P	D	T	${}_2\text{He}^3$	${}_2\text{He}^4$	${}_3\text{Li}^6$
n_x	1	0	1	2	1	2	3
z_x	0	1	1	1	2	0	3
s_x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	1
g_x	2	2	3	2	2	1	3
m_x	1	1	2	3	3	4	6 M _{Proton}
b_x	0	0	2,18	8,39	7,65	28,2	31,94 MeV
V_x	0	5	5,5	5,5	11	11	16,5 MeV
P_x	8,1	13,1	19,4	21,3	27,5	15	32,9 MeV
Q_x	0,098	0,048	0,147	0,245	0,195	0,294	0,440 MeV ⁻¹

Für die experimentelle Nachprüfung besonders geeignet sind die Emissionsverhältnisse ν_x/ν_P . Diese können ersetzt werden durch die bei einer bestimmten mittleren Temperatur genommenen Verhältnisse γ_x/γ_P , welche sich sofort aus obigen Zahlenwerten und Gl. (24) ablesen lassen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma_D}{\gamma_P} &= 3 \cdot e^{-\frac{6,3}{T} - 0,099 \cdot T}; & \frac{\gamma_T}{\gamma_P} &= 3 \cdot e^{-\frac{8,2}{T} - 0,197 \cdot T} \\ \frac{\gamma_{\text{He}^3}}{\gamma_P} &= 3 \cdot e^{-\frac{14,4}{T} - 0,147 \cdot T}; & \frac{\gamma_{\text{He}^4}}{\gamma_P} &= 2 \cdot e^{-\frac{1,9}{T} - 0,245 \cdot T} \\ \frac{\gamma_{\text{Li}^6}}{\gamma_P} &= 9 \cdot e^{-\frac{19,8}{T} - 0,392 \cdot T}; & \frac{\gamma_N}{\gamma_P} &\approx 1,53. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Gl. (24) zeigt, daß γ_N/γ_P empfindlich von θ abhängt und daher nicht mit den für $\theta = \theta_0$ gültigen Werten der Tabelle 2 darstellbar ist. Korrekter ist eine Annäherung durch $(dN/dZ)_{\theta = \theta_0}$. Sie liefert den angegebenen Wert 1,53. Die dazugehörige Rechnung wird in Abschn. d, α nachgeholt. Abb. 1a, b zeigt den Verlauf der Verhältnisse γ_x/γ_P als Funktion von T .

γ) **Kritische Betrachtung der Theorie.** Die Ableitungen des letzten Abs. β sind noch auf eine ganz andere Art und Weise möglich, welche im Detail etwas schwerfälliger ist, dafür aber einige Fragen beantwortet,

die bei kritischer Betrachtung von Abs. β auftreten, und welche deshalb hier in den Grundgedanken ausgeführt werden soll. Daran schließen sich einige kritische Bemerkungen zur Thermodynamik des Kerns und seiner Verdampfung, und schließlich lassen sich dabei die Grenzen für die Gültigkeit der hier behandelten Verdampfungstheorie festlegen.

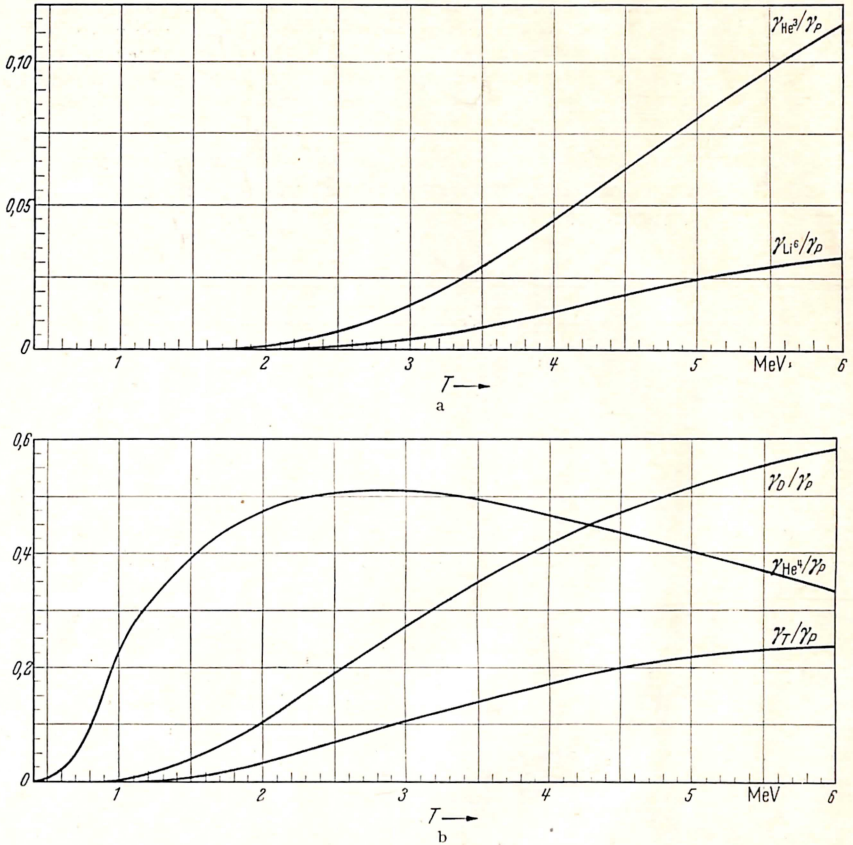


Abb. 1a u. b. Verhältnisse der Emissionswahrscheinlichkeiten γ_x/γ_p als Funktionen der Temperatur nach Gl. (25).

Wir denken uns den erhitzten Kern umgeben von einer idealen Gas-mischung aus den Teilchensorten x , also Neutronen, Protonen, Deuteronen usw. Zwischen den Komponenten x innerhalb der Gasphase, wie auch zwischen Gasphase und Kernphase, soll thermodynamisches Gleichgewicht herrschen. Diese Bedingung besteht für ein abgeschlossenes System darin, daß wir fordern: Die Entropie des Gesamtsystems soll ein Maximum sein, während Gesamtenergie und Gesamtteilchenzahl konstant zu halten sind. Eine solche Extremalbedingung hat für die inneren Parameter des Systems zur Folge, daß Temperatur T und Druck p für beide Phasen konstant und gleich sind, und weiter, daß bei

$T = \text{const}$ und $p = \text{const}$ die freie Gesamtenthalpie des Systems ein Minimum annimmt.

Geben wir den Teilchen x die Möglichkeit, den Kern zu betreten und zu verlassen, so hat das bei der Variation zur Folge, daß die freie Enthalpie, auf das Teilchen bezogen, in Gas und Kern die gleiche sein muß, also $g_x^g = g_x^k$. Diese „Verdampfungsbedingungen“ geben jeweils einen Zusammenhang zwischen der Teilchendichte ρ_x im Gas und ihrer Enthalpie g_x^k im Kern. Für Neutronen und Protonen folgen die g_x^k direkt aus der Gesamtenthalpie G^k des Kerns:

$$g_N^k = \left(\frac{\partial G^k}{\partial N} \right)_{T,p}; \quad g_P^k = \left(\frac{\partial G^k}{\partial Z} \right)_{T,p}, \quad (26)$$

für die zusammengesetzten Teilchen bleiben sie zunächst noch unbekannt.

Sind weiter innerhalb der Gasphase chemische Reaktionen möglich, etwa derart, daß das Teilchen $x(n, z)$ aus n Neutronen und z Protonen aufgebaut werden kann, so folgen daraus bei der Variation die Massenwirkungsgesetze

$$g_x^g = n g_N^g + z g_P^g, \quad (27)$$

aus denen sich mit den Verdampfungsbedingungen und den Gln. (26) gerade genügend Gleichungen zur Bestimmung der ρ_x herleiten:

$$g_x^g(\rho_x) = n \left(\frac{\partial G^k}{\partial N} \right)_{T,p} + z \left(\frac{\partial G^k}{\partial Z} \right)_{T,p}. \quad (28)$$

Die Emissionswahrscheinlichkeit $N_x(\epsilon) d\epsilon$ wird aus (28) berechnet durch Bestimmung der Zahl von Teilchen x des Gases im Energieintervall $d\epsilon$, welche in der Zeiteinheit den Kern von gegebener Oberfläche $4\pi R^2$ und Durchlabfähigkeit $\sigma/\pi R^2$ betritt, weil diese Zahl im Gleichgewicht der Zahl der emittierten Teilchen gleich sein muß. Die Endformel ist identisch mit (12), da ja ganz allgemein $\left(\frac{\partial G}{\partial A} \right)_{T,p} = \left(\frac{\partial F}{\partial A} \right)_{T,V}$ ist.

Aus den Gln. (28) läßt sich auch der Gesamtdruck bestimmen, welcher in (12) gestrichen wurde.

Es mag an den Formeln im Schluß von Abs. β auffallen, daß bei den üblichen Verdampfungstemperaturen von einigen MeV die Verdampfungswahrscheinlichkeit für beispielsweise Deuteronen nur wenig geringer ist als diejenige für Protonen, obwohl der Phasenraum für D doch viel kleiner sein sollte als für N und P einzeln. Der Grund dafür liegt in dem hohen Verdampfungsdruck. Verschiebt man das Gleichgewicht eines Gasgemisches bei konstanter Temperatur in Richtung wachsenden Drucks, so verschieben sich die Reaktionsgleichgewichte des Gases in Richtung geringster Gesamtanzahl, d. h. hier zugunsten der zusammengesetzten Teilchen.

Die Vernachlässigung der zweiten Ableitungen setzt ganz allgemein voraus, daß die Schwankungsquadrate klein sind. Da aber bei einer Statistik von A Objekten der mittlere Fehler von der Größenordnung $1/\sqrt{A}$ ist, beträgt der Relativfehler bei $A = 100$ etwa $\Delta A/A \approx A^{-1/2} = 10\%$. Er ist ein Maß für die Genauigkeit, mit der die thermodynamischen

Größen definiert sind, sofern man (wie hier) die Schwankungserscheinungen nicht berücksichtigt. Für die Atomkerne bedeutet das aber eine Einschränkung des Anwendungsbereichs der Verdampfungstheorie auf mittlere und schwere Kerne von wenigstens $A \geq 60$. Da durch die Nukleonenzahl die thermodynamischen Größen nur auf $\approx 10\%$ genau bestimmt sind, muß man danach fragen, ob die Theorie im übrigen auch innerhalb dieser Genauigkeitsgrenze bleibt. Wir haben in (10) höhere Potenzen als T^2 vernachlässigt. Wenn man entscheiden will, wie weit das zulässig ist, hat man die Entwicklung gemäß dem auf (19) folgenden Text in Potenzen von $(T/\zeta)^2$ zu schreiben, wo $\zeta \approx 25$ MeV die „Entartungstemperatur“ bedeutet. Damit das nächste Glied $(T/\zeta)^4$ — abgesehen von Koeffizienten — nicht mehr als 10% an der Anregungsenergie ändert, muß $T \lesssim 8$ MeV bleiben. Bei der im folgenden Absatz erwähnten prinzipiellen oberen Grenze von $T \approx 10$ MeV würde man hier einen Fehler von $\approx 15\%$ in Kauf nehmen. Hinzu tritt noch die Volumabhängigkeit und damit Abnahme von ζ mit steigender Temperatur.

Weiterhin muß beachtet werden, daß die Verdampfungstheorie auf einen angeregten Kern nur dann angewandt werden darf, wenn die Anregungsenergie nicht größer ist als etwa die gesamte Bindungsenergie des Kerns ($\approx 8,5 \cdot A$ MeV). Bei höherer Anregung laufen im Kern kaskadenartige Prozesse ab¹, ohne daß sich thermisches Gleichgewicht einstellen kann. Die Anregungsenergie, die die obere Grenze des Anwendungsbereichs der Verdampfungstheorie darstellt, beträgt für die Ag- und Br-Kerne in der Photoplatte etwa 800 MeV entsprechend einer Temperatur von etwa 10 MeV.

Schließlich bedarf die für die Höhe des GAMOW-Berges charakteristische Größe V'_x einer Bemerkung. Da bei hoher Kernanregung Oberflächenschwingungen entstehen, nimmt die mittlere Nukleonendichte in diesem Falle nach außen langsamer ab, und der GAMOW-Berg wird abgeflacht. V'_x wird kleiner, sinkt also mit der Temperatur. Dieses Problem wird von BAGGE [Ba 43b] quantitativ behandelt, um insbesondere die noch merkbare Anzahl beobachteter α -Teilchen zu erklären, welche mit Energien $\epsilon < V'_x$ emittiert werden. Siehe hierzu aber S. 223.

d) Theorie der sukzessiven Verdampfung.

α) **Allgemeiner Ansatz.** Nachdem in den beiden letzten Abschnitten der einzelne Verdampfungsprozeß ausführlich behandelt wurde, verbleibt nunmehr noch die Aufgabe, die Verdampfung eines Kerns zu untersuchen, so wie sie uns in den Sternen der Photoplatte ja auch nur in ihrer Gesamtbilanz experimentell zugänglich ist. Von dieser integralen Verdampfung haben wir uns etwa folgendes Bild zu machen:

Gegeben sei zur Zeit $t=0$ ein Kern durch N_a und Z_a bzw. A_a und Θ_a und seine Anregungsenergie $U_a = E_a - E_{0a}$ †. Diese Größen legen die Wahrscheinlichkeiten für die erste Verdampfung fest. Danach ändern

¹ Siehe Abschn. 8.

† U_a ist die Anregungsenergie zu Beginn der regulären Verdampfung.

sich A , Θ , U und es findet eine weitere Emission unter neuen Voraussetzungen statt. Diese Emissionen wiederholen sich nun. Dabei sinken A und U monoton, Θ sinkt im Mittel über mehrere Einzelprozesse bis schließlich die Anregungsenergie U verbraucht ist, also $U=0$ oder so klein ist, daß jedenfalls kein Kernteilchen mehr emittiert werden kann. Der Kern bewegt sich im N - Z -Diagramm auf einer Kurve, die im Einzelfall verschieden verläuft. Für jede in diesem Sinne mögliche Verdampfungskurve existiert eine gewisse Wahrscheinlichkeit. Ist sie bekannt, so lassen sich die gesuchten Größen, wie die Zahlen der im Mittel emittierten Teilchen $\nu_x(\varepsilon)d\varepsilon$ unter gegebener Energie berechnen. Aus ihnen folgen alle weiteren Aussagen, die sich nach Abs. b experimentell kontrollieren lassen. Allerdings stößt die Berechnung der genannten Wahrscheinlichkeit auf erhebliche Schwierigkeiten. Wir begnügen uns daher mit einer weniger exakten aber einfacheren, von LE COUTEUR [Le 50a] eingeschlagenen Methode zur Berechnung der sukzessiven Verdampfung. Es wird nur die wahrscheinlichste Kurve berechnet und dabei angenommen, daß alle Teilchen mit ihrer mittleren Energie $\bar{\varepsilon} = 2T + V'_x$ emittiert werden.

Zu bestimmen sind also zunächst die Größen N , Z , U (oder entsprechend A , Θ , T) als Funktionen der Zeit, sowie $\nu_x(t)$ für alle x als die Zahl der zur Zeit t bereits emittierten Teilchen x . Diese Größen sind durch Differentialgleichungen mit den bekannten Emissionswahrscheinlichkeiten und mittleren Energien $\bar{\varepsilon}_x$ verbunden, welche ihrerseits wieder von N , Z , T bzw. den daraus abgeleiteten A , Θ , T abhängen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\nu_x}{dt} &= \gamma_x; & -\frac{dN}{dt} &= \sum_x n_x \gamma_x; & -\frac{dZ}{dt} &= \sum_x z_x \gamma_x \\ -dU &= -dE + dE_0 = \sum_x d\nu_x \left[\bar{\varepsilon}_x - b_x + \frac{dE_0}{d\nu_x} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Weiter läßt sich noch die Gesamtteilchenzahl $\nu(t)$ einführen

$$\nu(t) = \sum_x \nu_x(t); \quad \frac{d\nu}{dt} = \sum_x \gamma_x. \quad (30)$$

Auch diese Gleichungen lassen sich kaum exakt lösen. Aus der Gleichung für Θ :

$$-\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{N-Z}{N+Z} = \frac{1}{A} \sum_x (n_x - z_x) \gamma_x - \frac{\Theta}{A} \sum_x (n_x + z_x) \gamma_x \quad (31)$$

und derjenigen für dU/dt läßt sich durch Division eine Beziehung für $\Theta = \Theta(U, A)$ gewinnen. Aus Tabelle 1 in Abschn. c folgt, daß die γ_x und $\bar{\varepsilon}_x$ nur wenig von A abhängen. Also wird A durch einen arithmetischen Mittelwert ersetzt. Diese Beziehung wird von LE COUTEUR [Le 50a] berechnet. Es stellt sich heraus, daß die wahrscheinlichste Emission in der Nähe der Talsohle stattfindet, so daß also genähert $\Theta \approx \Theta_0(A)$ gilt. Für die Anteile der Neutronen und Protonen in der Gesamtemission bedeutet das (für $A=80$):

$$\frac{dN}{dZ} = \frac{d[A(1+\Theta_0)]}{d[A(1-\Theta_0)]} = \frac{1+\Theta_0+A \frac{d\Theta_0}{dA}}{1-\Theta_0-A \frac{d\Theta_0}{dA}} \approx 1,53. \quad (32)$$

Die nächste Aufgabe wäre jetzt, etwa mit Hilfe von (29) die Temperatur als Funktion der Zeit und der Anfangstemperatur auszudrücken — natürlich im Mittel über viele gleichartige Prozesse, die dann als kontinuierlich ablaufend behandelt werden dürfen. Erst wenn $T(T_a, t)$ bekannt ist, läßt sich $v_x = \int_{t_a}^{t_e} \gamma_x [T(t)] dt$ berechnen oder auch durch $v_x = (t_e - t_a) \cdot \gamma_x(\bar{T}_x')$ eine mittlere Temperatur definieren, die ersichtlich trotz einer gemeinsamen Anfangstemperatur T_a für jede Teilchensorte x einen anderen Wert haben wird. Wiederum eine andere mittlere Temperatur wird man in $\frac{v_x}{v_p} = \frac{\gamma_x(\bar{T}')}{\gamma_p(\bar{T}')} = \frac{\gamma_x}{\gamma_p}(\bar{T})$ benötigen und schließlich für das Energiespektrum, soweit es mit einer einzigen mittleren Temperatur überhaupt näherungsweise darstellbar ist, eine dritte mittlere Temperatur brauchen.

Je nach der gestellten Frage kommen also für jede einzelne Teilchensorte schon mehrere verschiedene Temperaturmittelwerte in Betracht, obwohl es sich um ein und denselben Verdampfungsprozeß handelt. Zur Berechnung aller dieser Werte ist die Kenntnis der Funktion $T(T_a, t)$ erforderlich. Das ist im Prinzip mit Hilfe von (29) erreichbar, aber nur, wenn man umfangreiche numerische Integrationen in Kauf nimmt. In Anbetracht der groben Näherungen, die die ganze Theorie schon enthält, wäre das eine ungerechtfertigte Mühe. Es gibt einen bequemeren Weg, der völlig ausreicht:

Zunächst lassen wir die Unterscheidung der einzelnen mittleren Temperaturen fallen und behandeln alle Emissionsverhältnisse und Energiespektren mit *einer einzigen* mittleren Temperatur, die nur noch von der Anregungstemperatur des betrachteten Prozesses abhängt.

Weiterhin erinnern wir uns, daß die ganze Verdampfungstheorie nach oben durch die thermodynamischen Näherungen und die Bedingungen zur Einstellung des thermischen Gleichgewichts begrenzt ist: $T_a \lesssim 10$ MeV. Aber auch nach unten: Für Sterne kleiner Spurenzahl kann man nicht mehr annehmen, daß sie überwiegend aus Ag und Br stammen, sondern es ist vielmehr ein großer Teil von ihnen aus leichten Kernen entstanden. Für diese gilt erstens die Verdampfungstheorie wegen der kleinen Nukleonenzahl schlecht; außerdem stimmen unsere für $A \approx 80$ berechneten Zahlenwerte dann auch nicht. Das Gebiet, in dem die abgeleiteten Formeln zutreffen sollten, liegt also etwa zwischen 5 und 10 MeV für T_a . In diesem engen Bereich werden wir den Zusammenhang zwischen der mittleren Temperatur und der Anregungstemperatur durch eine einfache Proportionalität annähern:

$$\bar{T} \approx \alpha \cdot T_a. \quad (33)$$

Auch der Proportionalitätsfaktor α würde sich durch die oben angedeuteten Rechnungen ergeben, wenn man für \bar{T} wiederum einen Mittelwert der verschiedenen mittleren Temperaturen nähme. Wir werden hingegen α als Parameter behandeln und aus einem Experiment bestimmen.

Es wird sich zeigen, daß damit nicht nur dieses eine Experiment gut wiedergegeben wird, sondern auch andere, von dem zur Bestimmung von α benutzten wesensverschiedene.

β) **Die Abkühlungskurve.** Aus Gl. (29) mit $\bar{\epsilon}_x = 2T + V'_x$ und Gln. (20) bis (24) ergibt sich

$$-dU = \sum_x dv_x \cdot (2T + P_x) = 2T \sum_x dv_x + \sum_x P_x dv_x.$$

Wir betrachten den Vorgang im Mittel über viele gleichartige Prozesse (gleiche Anregungsenergie) und behandeln ihn als kontinuierlich. Dann ist T eine Funktion der Zahl A der im Kern vorhandenen Nukleonen. Also gilt

$$-dU = - \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_A \frac{dT}{dA} + \left(\frac{\partial U}{\partial A} \right)_T \right] \sum_x \frac{\partial A}{\partial v_x} dv_x.$$

Mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} p &= - \sum_x \frac{\partial A}{\partial v_x} \frac{dv_x}{dv_P} = - \sum_x \frac{\partial A}{\partial v_x} \frac{\gamma_x}{\gamma_P} \\ q &= \sum_x \frac{dv_x}{dv_P} = \sum_x \frac{\gamma_x}{\gamma_P} \\ r &= \sum_x P_x \frac{dv_x}{dv_P} = \sum_x P_x \frac{\gamma_x}{\gamma_P} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

erhalten wir

$$p \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_A \frac{dT}{dA} + \left(\frac{\partial U}{\partial A} \right)_T \right] = 2T \cdot q + r. \quad (35)$$

Aus $U \approx KA T^2$ [der Faktor $(1 + b \Theta^2)$ ist hier unerheblich] folgt dann nach Division durch $K \cdot p$

$$2AT \frac{dT}{dA} + T^2 = -2a_1 T - a_2. \quad (36)$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$\left. \begin{aligned} q/Kp &= -a_1 \\ r/Kp &= -a_2. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Rechnet man jetzt mit Hilfe von (25) und den Definitionsgleichungen (34) und (37) a_1 und a_2 als Funktion der Temperatur aus, so ergibt sich, daß beide nur schwach veränderlich sind¹ und daher (36) leicht zu integrieren ist, wenn man näherungsweise die a_1 und a_2 konstant läßt und an einem Temperaturmittelwert nimmt. Bezeichnet man mit A_a bzw. T_a die Anfangswerte der Nukleonenzahl bzw. der Temperatur, so

¹ Das ist mit Hilfe von (34) leicht einzusehen: In Zähler und Nenner stehen Summen über Ausdrücke γ_x/γ_P . Zieht man in r einen Faktor der Größenordnung 10 vor die Summe, so stehen vor den wesentlichen Gliedern in Zähler und Nenner annähernd die gleichen Koeffizienten und die T -Abhängigkeit der Brüche wird gering.

lautet die Lösung von (36) mit konstanten a_1 und a_2

$$\frac{A(T)}{A_a} = \left(\frac{T_1 - T_a}{T_1 - T} \right)^{2b_1} \cdot \left(\frac{T_2 - T_a}{T_2 - T} \right)^{2b_2} \quad (38)$$

Die Größen T_1 , T_2 , b_1 , b_2 sind definiert durch

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2} \\ T_2 &= -a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2} \\ 2b_1 &= [-a_1 / \sqrt{a_1^2 - a_2}] + 1 \\ 2b_2 &= [+a_1 / \sqrt{a_1^2 - a_2}] + 1. \end{aligned} \right\} \quad (39)^1$$

Die Abkühlungskurve (38) selbst ist uninteressant, da sie ja nicht nachgemessen werden kann. Aus (38) folgt aber für $T=0$ die Nukleonenzahl am Ende der Verdampfung:

$$\frac{A_e}{A_a} = \left(\frac{T_1 - T_a}{T_1} \right)^{2b_1} \cdot \left(\frac{T_2 - T_a}{T_2} \right)^{2b_2} \quad (40)$$

An dieser Stelle tritt wieder die mittlere Temperatur entscheidend auf: Sie steckt über die γ_x und damit a_1 , a_2 in den Größen T_1 , T_2 , $2b_1$, $2b_2$. Sind also T_a , A_a und A_e gegeben, so kann man aus (40) und den γ_x die zu T_a gehörige mittlere Temperatur entnehmen.

Wir gehen umgekehrt vor: Aus dem Experiment entnehmen wir A_e/A_a und die zugehörige mittlere Temperatur und bestimmen aus (40) die Anfangstemperatur T_a :

Nach PERKINS [Pe 50b] Abschn. 9, Abb. 6, S. 191 und hier, Abb. 5, S. 221 hat das Emissionsverhältnis ν_{He^4}/ν_P ein Maximum bei Sternen mit der Spurenzahl

$\nu_s \approx 9$. Ersetzen wir also $\frac{\nu_{\text{He}^4}}{\nu_P}$ durch $\frac{\gamma_{\text{He}^4}}{\gamma_P}(\bar{T})$, so entspricht der Spurenzahl

$\nu_s = 9$ diejenige mittlere Temperatur, bei der $\frac{\gamma_{\text{He}^4}}{\gamma_P}(T)$ ein Maximum hat. Das liegt nach Abb. 1a bei $T = 2,8$ MeV:

$$\nu_s = 9 \quad \leftrightarrow \quad \bar{T} = 2,8 \text{ MeV}. \quad (41)^2$$

Für diese mittlere Temperatur ergibt (25) oder Abb. 1a und b die Emissionsverhältnisse der übrigen Teilchensorten. Aus der gegebenen Gesamtspurenzahl und den einzelnen Emissionsverhältnissen erhält man durch eine einfache Rechnung für die Änderung der Gesamtnukleonenzahl A

$$\Delta A = p \cdot \frac{\nu_s}{q - \frac{\gamma_N}{\gamma_P}} = p \frac{\nu_s}{q - 1,53}, \quad (42)$$

wobei p und q die Bedeutung von Gl. (34) haben und bei der mittleren Temperatur genommen sind.

Für $\bar{T} = 2,8$ MeV und $\nu_s = 9$ wird $\Delta A \approx 26$.

¹ HARDING, LATTIMORE und PERKINS [Ha 49b] gelangen durch einen einfacheren Ansatz zur gleichen Form der Abkühlungskurve, jedoch sind dort die Größen T_1 , T_2 , b_1 , b_2 von Anfang an festgelegt und nicht wie hier Funktionen einer mittleren Temperatur und damit der Anregungsenergie.

² He⁴ hat einen angeregten Zustand bei ≈ 21 MeV, der aber an den Emissionszahlen praktisch nichts ändert. (Siehe S. 211.)

Rechnet man mit $\bar{T} = 2,8$ MeV die Werte von T_1 , T_2 , b_1 , b_2 in (40) aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} T_1 &= 21,43 & 2b_1 &= 1,642 \\ T_2 &= -4,67 & 2b_2 &= 0,358. \end{aligned}$$

Für A_a ist der Mittelwert von Ag und Br, also ≈ 94 zu nehmen (während zur Berechnung der P_x und Q_x in den γ_x als Mittelwert über die Verdampfung $\bar{A} \approx 80$ benutzt wurde. Dann wird mit $\Delta A = 26$ das Verhältnis

$$\frac{A_e}{A_a} = 0,724 = \left(\frac{21,43 - T_a}{21,43} \right)^{1,642} \cdot \left(\frac{4,67 + T_a}{4,67} \right)^{0,358}$$

und daraus folgt $T_a \approx 7,0$, so daß jetzt $\alpha = \frac{\bar{T}}{T_a} = \frac{2,8}{7,0} = 0,40$ wird.

Im folgenden wird dieser Wert von α im Rahmen der Näherung und des Gültigkeitsbereichs der Theorie als konstant angesehen und es gilt

$$\bar{T} = 0,40 \cdot T_a. \quad (43)$$

γ) Auswertung der Abkühlungskurve. Nach dieser Festsetzung läßt sich aus (40) noch mehr herausholen: Man kann jetzt zu jedem T_a mit Hilfe der Definitionsgleichungen für die T_1 , T_2 , b_1 , b_2 und der zugehörigen mittleren Temperatur \bar{T} den Wert von A_e/A_a berechnen (wobei wieder die nur langsame Veränderlichkeit der a_1 und a_2 entscheidend ist; auch die $T_{1,2}$ und $b_{1,2}$ ändern sich kaum mit T). Abb. 2 zeigt das Ergebnis. In derselben Abbildung ist auch $\Delta A = A_a \left(1 - \frac{A_e}{A_a} \right)$ als Funktion von T_a aufgetragen.

Weiter liefert jetzt Gl. (42) die Spurenzahl ν_s als Funktion von ΔA und damit über Abb. 2 auch als Funktion von T_a bzw. \bar{T} (p und q jeweils bei \bar{T} genommen). Abb. 3 gibt die mittlere Temperatur als Funktion der Spurenzahl wieder. Bei Sternen mit einer mittleren Spurenzahl ν_s sollen sowohl die Emissionsverhältnisse wie auch die Energiespektren

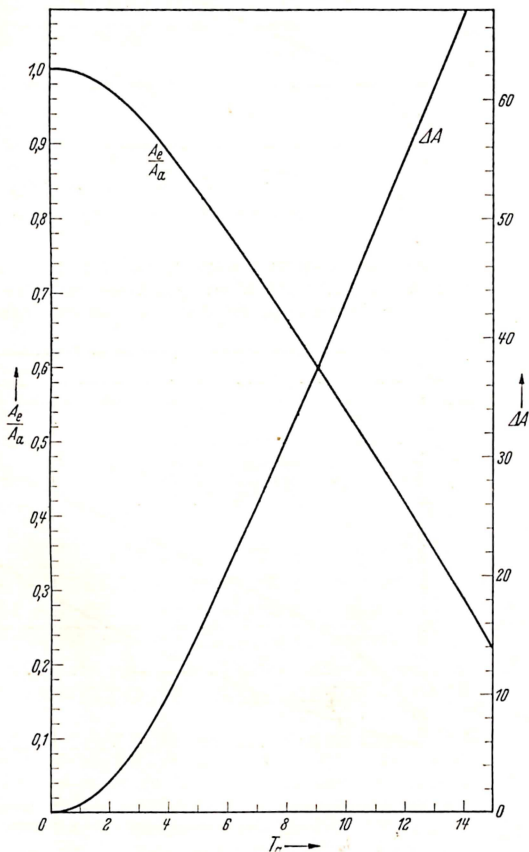


Abb. 2. Verhältnis A_e/A_a der Nucleonenzahlen zu Ende und zu Anfang der Verdampfung sowie die Zahl ΔA der verdampften Nucleonen als Funktionen der Anfangstemperatur nach Gl. (40).

befriedigend wiedergegeben werden, wenn man in die entsprechenden Formeln die durch Abb. 3 gelieferte mittlere Temperatur einsetzt.

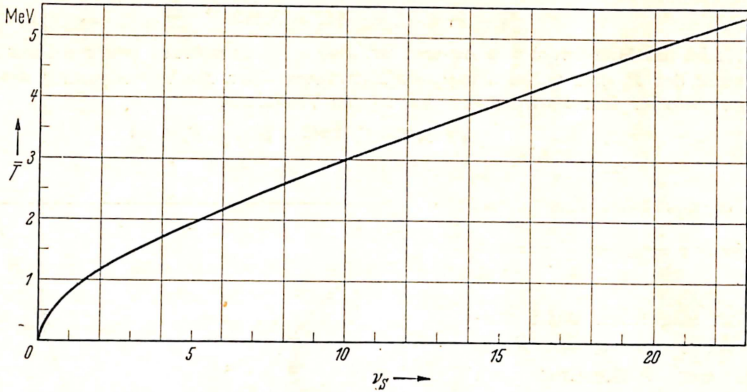


Abb. 3. Mittlere Verdampfungstemperatur \bar{T} als Funktion der Spurenzahl ν_s nach Gl. (42), (43) und Abb. 2.

Dabei hat man zu erwarten, daß die mit dieser mittleren Temperatur berechneten Werte nicht bei allen Teilchensorten gleich gut stimmen, da ja eigentlich jeder Sorte ihre eigene mittlere Temperatur zukommt. Auf Grund der Art ihrer

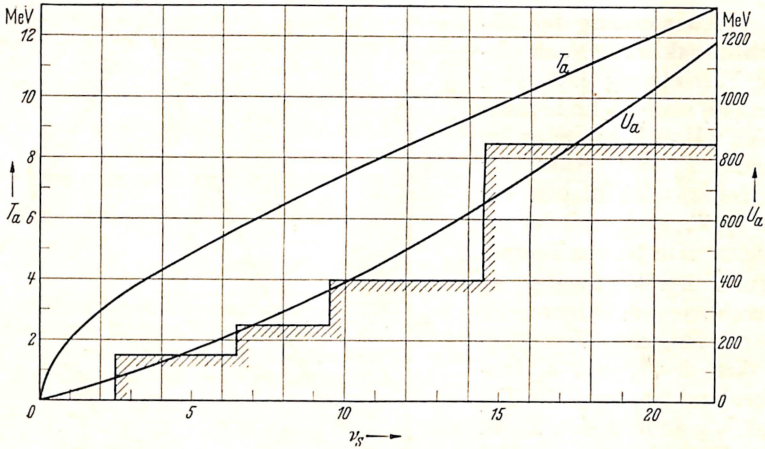


Abb. 4. Anfangstemperatur T_a und Anregungsenergie U_a als Funktionen der Spurenzahl nach Gl. (42) und Abb. 2. [U_a ist die Anregungsenergie zu Beginn der regulären Verdampfung.]

Gewinnung sollte die aus Abb. 3 entnommene Temperatur zunächst die Emissionsverhältnisse richtig darstellen und erst in zweiter Linie die Energiespektren, die sich ja mit einer mittleren Temperatur sowieso nicht streng wiedergeben lassen.

In Abb. 4 ist derselbe Zusammenhang aufgetragen, nur ist statt \bar{T} jetzt T_a als Funktion von ν_s gewählt. Aus $U_a = A_a \cdot K \cdot T_a^2$ folgt dann sofort auch U_a als Funktion von ν_s . Zum Vergleich mit den wenigen Messungen, die hierüber vorliegen, sind die Werte, die sich in Abschn. 9 unter Abb. 2, S. 183 finden, als Treppenkurve eingezeichnet.

e) Vergleich mit dem Experiment.

In Anbetracht der gemachten Näherungen und der Begrenzung der Gültigkeit der Verdampfungstheorie auf Sterne mit Spurenzahlen zwischen etwa 5 und 18 sollten alle Kurven außerhalb dieser Grenzen nicht sehr ernst genommen werden. Trotzdem scheinen sie auch dort noch teilweise befriedigend zu stimmen.

Die Beziehung für die Anregungsenergie (Abb. 4) ist schwer nachzuprüfen, da die experimentellen Werte (Treppenkurve in Abb. 4) selbst noch recht unsicher und eigentlich eher Schätzungen sind (II, 9; S. 183).

In Abb. 5 sind Messungen von PERKINS [*Pe 50b*] (Abschn. 9; Abb. 6, S. 191) und die theoretischen Werte von $\frac{\nu_{\text{He}^4}}{\nu_P} = \frac{\gamma_{\text{He}^4}}{\gamma_P}(\bar{T})$ als Funktion der Spurenzahl aufgetragen. (Aus den Abbildungen 1 a, b und Abbildung 3 gewonnen.) Daß das Maximum der Kurve bei $\nu_s = 9$ liegt, ist trivial, denn so hatten wir gerade den Proportionalitätsfaktor zwischen \bar{T} und T_a bestimmt. Daß aber die Höhe und der allgemeine Verlauf der Kurve mit den Messungen im großen und ganzen im Einklang ist, darf als Erfolg der Theorie angesehen werden¹.

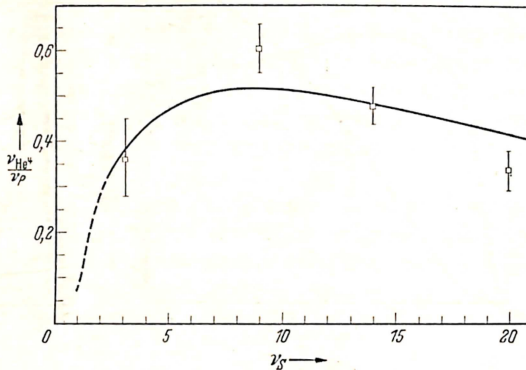


Abb. 5. Das Emissionsverhältnis ν_{He^4}/ν_P als Funktion der Spurenzahl ν_s . Vergleich mit Messungen von PERKINS [*Pe 50b*] Abschn. 9, Abb. 6, S. 191.

In Abb. 6 sind dargestellt das Verhältnis zweifach geladener Teilchen zur Gesamtspurenzahl und das Verhältnis der emittierten Deuteronen und Tritonen zur Gesamtzahl der emittierten einfach geladenen Teilchen. Für letzteres ist nur bekannt, daß es für $\nu_s \approx 10$ zwischen 0,25 und 0,30 liegen soll (Abschn. 9; S. 191). Das gibt die Theorie gut wieder. Schließlich soll das erste Verhältnis für $\nu_s = 9$ nach PAGE [*Pa 50a*]

¹ Offenbar läuft aber die theoretische Kurve zu flach. Formal könnte man das beheben, indem man in ν_x das Glied mit Q_x im Exponenten [Gl. (24)] statt mit T mit einer etwas höheren Potenz T^λ ($\lambda \gtrsim 1$) gehen ließe. Dieses Glied stammt aus der Anregungsenergie in $E = E_0 + BT^m$ [Gl. (16)], wo demnach $m \gtrsim 2$ statt $m = 2$ zu setzen wäre. Das könnte man als Hinweis auffassen, daß das verwendete Modell nicht zutrifft, welches den Kern als ein in einem starren Gefäß (Kernvolumen) eingeschlossenes FERMI-Gas behandelt. An seine Stelle hätte dann ein nicht mehr starrer Potentialtopf endlicher Tiefe zu treten. Das würde zum Teil eine Annäherung an die anderen erwähnten Modelle bedeuten und damit eine Erhöhung des Exponenten von T . Andererseits nähern wir uns bei höheren Temperaturen schon der Entartungstemperatur für unser Modell, d. h. dem idealen Gas, für das eigentlich eher $m \lesssim 2$ zuträfe. Dieser letzte Effekt scheint also sogar durch den erstgenannten überdeckt zu werden. Bevor man jedoch mit dieser Vorstellung ernst macht, wäre zu untersuchen, wieweit der zu flache Verlauf noch an den anderen Vernachlässigungen liegen könnte, insbesondere an der angenommenen Proportionalität zwischen Anfangstemperatur und mittlerer Temperatur.

den Wert 0,271 haben, während die Kurve den Wert 0,28 liefert. Die zu dieser Kurve gehörigen Messungen von PAGE [Pa 50 a] sind eingetragen. Die Abweichungen bei weniger als 5 Spuren gehen zu Lasten der leichten Kerne, deren Beitrag in der Kurve nicht enthalten ist. Immerhin zeigt sich trotzdem ein ähnlicher Verlauf: Mit abnehmender Spurenzahl ein langsamer Anstieg und dann ein steiler Abfall nach Null. Da die mittleren Temperaturen, mit denen die Verhältnisse ausgerechnet wurden [Gl. (25) bzw. Abb. 1 a, b], aus Abb. 3 entnommen wurden, kann man Abb. 6 als grobe Bestätigung von Abb. 3 ansehen.

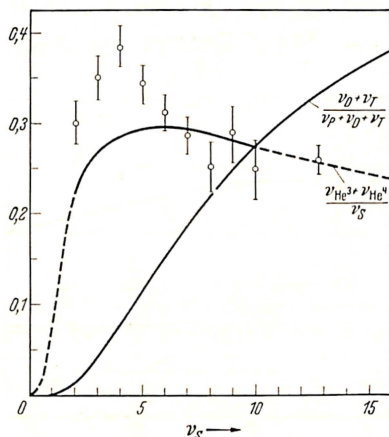


Abb. 6.

Abb. 6. Verschiedene Emissionsverhältnisse als Funktionen der Spurenzahl, verglichen mit Messungen von PAGE [Pa 50 a].

Schließlich sollte mit den \bar{T} -Werten aus Abb. 3 auch das Energiespektrum annähernd herauskommen.

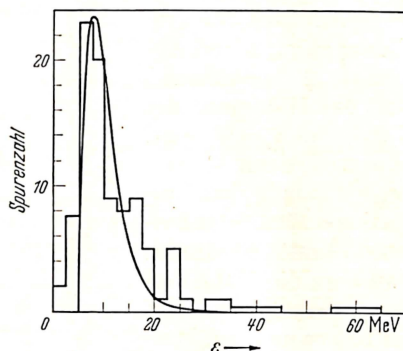


Abb. 7.

Abb. 7. Das Energiespektrum der Protonen in Sternen mit 8 Spuren nach Gl. (15), verglichen mit Messungen von HARDING, LATTIMORE und PERKINS [Ha 49 b]; Abschn. 9, S. 183.

In Abb. 7 wird das Protonenenergiespektrum für Sterne mit 7 bis 9 Spuren nach HARDING, LATTIMORE und PERKINS [Ha 49 b]; Abschn. 9, Abb. 2 verglichen mit der theoretischen Kurve Gl. (15), wobei der einer Spurenzahl $\nu_s = 8$ entsprechende Wert $\bar{T} = 2,6$ MeV aus Abb. 3 entnommen ist. Sowohl die von \bar{T} abhängende Lage des Maximums wie auch der Abfall nach rechts stimmen im Rahmen der Vergleichsmöglichkeiten mit der Messung überein. Der deutliche Überschuß von Protonen sehr hoher und sehr kleiner Energie hat Ursachen, die außerhalb der Verdampfungstheorie liegen: Die energiereichen Protonen sind vor Einstellung des thermischen Gleichgewichts aus dem Kern direkt herausgestoßen worden, die energiearmen haben den Kern unter Ausnutzung des Tunneleffektes verlassen, der zu grob berücksichtigt war, um solche Feinheiten in der theoretischen Kurve zeigen zu können.

Allgemein kann man sagen, daß die Verdampfungstheorie die Messungen befriedigend wiedergibt. Was hier aus Platzmangel nicht möglich war, hat LE COUTEUR [Le 50 a] in seiner Arbeit gezeigt: Wie empfindlich die Endformeln und Kurven von den noch unsicheren Werten der Potentiale, der spezifischen Wärme usw. abhängen (Abschn. 9, Abb. 4, S. 185).

Da diese Werte zum großen Teil nicht anderweitig sicher festzulegen sind, spielen sie hier die Rolle von Parametern, die in gewissen Grenzen frei sind. Wenn erst durch mehr Material genauere experimentelle Werte vorliegen, könnte man vermutlich diese Parameter so verändern, daß die Theorie besser die Messungen wiedergibt als heute. Daß aber die Verdampfungstheorie das Verständnis des Sternerzeugungsvorganges bei niedrigen Anregungsenergien liefert, wird durch die hier durchgeführten Vergleiche bestätigt.

Für weitere Einzelheiten muß auf die Arbeit von LE COUTEUR [Le 50a] hingewiesen werden. Dort wird auch die Abnahme des Potentials V' mit der Temperatur in verschiedenen Ansätzen behandelt, die natürlich ebenfalls in unsere Darstellung noch eingebaut werden können, indem man z. B. in Gl. (24) ein temperaturabhängiges V' einführt und so einen oder mehrere weitere Parameter gewinnt. Schließlich berücksichtigt LE COUTEUR [Le 52a] in einer weiteren Arbeit auch die Schwankungserscheinungen und gibt dort unter anderem eine bessere Formel für das Energiespektrum an, die dem Rechnung trägt, daß das gemessene Spektrum eigentlich eine Überlagerung der von uns betrachteten Kurven darstellt.

Zum Schluß muß noch die Sonderstellung der α -Teilchen hervorgehoben werden, die sich zwar bezüglich ihrer Emissionshäufigkeiten bei kleinen Anregungsenergien der Theorie einzuordnen scheinen, jedoch dem theoretischen Energiespektrum besonders bei höheren Anregungsenergien nicht folgen und dort auch eine deutliche Winkelkorrelation zeigen (Abschn. 9, S. 188).

Anscheinend liegen hier zwei verschiedene Ursachen vor, von denen bei kleinen Energien (Sterne bis zu ≈ 15 Spuren) nur die eine wirkt und darüber beide beitragen:

1. Bei kleinen Sternen sind die Richtungen statistisch verteilt und man erhält die richtigen Energiespektren mit Werten von V' bzw. \bar{T} , die zwar in der Größenordnung der von uns benutzten Werte liegen, aber doch so, daß V' kleiner und \bar{T} größer als bei uns ausfallen. In dem Gebiet, auf das sich die Verdampfungstheorie nach unserer Abschätzung (siehe e) anwenden läßt, ist sie bezüglich des Energiespektrums dann richtig, wenn man die Abnahme des Potentials V' mit wachsender Temperatur berücksichtigt und eine etwas höhere als die von uns angenommene mittlere Temperatur einsetzt. Das ergibt sich nach HODGSON [Ho 52c], wo Sterne mit kleinen Spurenzahlen untersucht werden und durch ein Subtraktionsverfahren dafür gesorgt wird, daß nur solche α -Teilchen zum Spektrum beitragen, die aus schweren Kernen (Ag und Br) stammen. Daß man die Temperatur höher wählen muß, ist nicht weiter verwunderlich: Genau genommen entsteht ja das gemessene Spektrum $W(\epsilon)$ aus unserem differentiellen Spektrum $\omega(\epsilon)$ durch Überlagerung:

$$W_x(\epsilon) = \int_{t_a}^{t_e} \gamma_x(T(t)) \cdot \omega_x(\epsilon, T(t)) dt \dagger.$$

Wenn also mit einer mittleren Temperatur \bar{T} das gemessene Protoneuspektrum annähernd wiedergegeben wird, so braucht das mit derselben Temperatur für α -Teilchen nicht mehr zu stimmen. Aus Abb. 1a geht nämlich hervor, daß das Emissionsverhältnis bis zu Sternen von etwa 9 Spuren hinauf für α -Teilchen mit wachsender Temperatur günstiger wird, mit anderen Worten: Bei Sternen bis zu 9 Spuren ist der Prozentsatz von α -Teilchen zu Beginn der Verdampfung größer als am

† Vgl. die Methode von HARDING, LATTIMORE und PERKINS [Ha 49b], Abschn. 9, S. 184, die eine Annäherung an $W_x(\epsilon)$ darstellt.

Ende. Dadurch tragen die Teile des Integrals zu $W(\varepsilon)$ am meisten bei, die höheren Temperaturen entsprechen und dadurch wird das Spektrum $W(\varepsilon)$ verbreitert. Will man dann $W(\varepsilon)$ durch $\omega(\varepsilon)$ mit einer mittleren Temperatur ersetzen, so ist diese höher zu wählen als für Protonen unter gleichen Umständen.

2. Bei großen Sternen ($\nu_s \approx 15$) wird etwas Neues beobachtet:

a) Es treten α -Teilchen auf, deren kinetische Energie bis unter 1 MeV reicht, ohne daß deshalb die hohen Energien fehlen würden (Abschn. 9, S. 186).

b) Es macht sich mit wachsender Anregungsenergie eine zunehmende Bündelung der Austrittsrichtungen bemerkbar (Abschn. 9, S. 188).

Offenbar verliert hier die Verdampfungstheorie einen Teil ihrer Zuständigkeit. Es sind zwei Erklärungen vorgeschlagen worden [Ha 49b]:

I. Die α -Teilchen werden von im ersten Augenblick (vor Einstellung des thermischen Gleichgewichts) übererhitzten Stellen des Kerns emittiert, wo dann das Potential V' stark absinkt. Dadurch können sowohl sehr langsame wie auch sehr schnelle Teilchen austreten und zwar nur vom Kern weg und nicht durch ihn hindurch. Das hat eine Bündelung zur Folge.

II. Das Primärteilchen zerschlägt den Kern in zwei oder mehr schwere Teile (Spaltung), von denen die schwereren danach verdampfen und die leichteren spontan in α -Teilchen zerfallen. Nach der Verdampfung fliegen die schweren Bruchstücke noch weiter und hinterlassen eine starke, kurze Rückstoßspur. 4 von 26 durch HARDING, LATTIMORE und PERKINS [Ha 49b] untersuchten großen Sternen zeigten mehr als eine solche Spur. Da bei diesem Vorgang auch die großen Bruchstücke erhebliche Anteile kinetischer Energie übernehmen, bewegen sich die übrigen leichten im Laborsystem langsamer als einzelne, normal verdampfte α -Teilchen fliegen würden. α -Teilchen, die als Zerfallsprodukte solcher Splitter auftreten, haben dann nur noch den kleineren GAMOW-Wall des Bruchstückes zu überwinden und können dann kinetische Energien zeigen, die weiter unter V' liegen als allein der Potentialabnahme bei steigender Temperatur entspräche. Sie werden zudem eine Bündelung erfahren, da die innere Bindungsenergie dieser Splitter klein ist. Anders bei den schwereren Splintern, die regulär verdampfen: Die von ihnen ausgehenden Teilchen haben große Energien, so daß die geringe Eigenbewegung des Verdampfungsentrums überdeckt wird. Aus diesen Bruchstücken würden dann auch die übrigen α -Teilchen hoher Energie stammen. Tatsächlich hat sich bei Protonen bis zu großen Sternen ($\nu_s \approx 22$) hinauf keine Winkelkorrelation gezeigt, die irgend mit der der α -Teilchen vergleichbar wäre. Es wäre interessant, bei großen Sternen die Richtungsverteilung der α -Teilchen getrennt für zwei Gruppen ($\varepsilon \lesssim 5$ MeV und $\varepsilon \gtrsim 15$ MeV) zu untersuchen:

Wenn die zweite Vorstellung richtig wäre, sollte man bei den langsamen α -Teilchen, die aus den leichteren Splintern stammen, eine stärkere Bündelung feststellen als bei den schnellen, die aus dem normal verdampfenden schwereren Bruchstück kommen.

Die Abgrenzung dieser zwei Gruppen geht von der Vorstellung aus, daß α -Teilchen mit $\varepsilon \lesssim 5$ MeV im allgemeinen nicht aus den schwereren Bruchstücken verdampft sein sollten, denn diese Verdampfung würde als normal verlaufend an der Potentialschwelle ihre untere Grenze finden. Andererseits würden solche mit $\varepsilon \gtrsim 15$ MeV nicht durch Zerfall der leichteren Splitter entstehen, es sei denn, daß sich die Geschwindigkeiten von Splitter und α -Teilchen zufällig annähernd gleichsinnig addieren.

Schließlich wird gerade die Richtung, in der die α -Teilchen aus den Bruchstücken herausfliegen, noch eine entscheidende Rolle spielen: Wenn sie der Flugrichtung des Bruchstückes annähernd entgegensteht, wird ein im Laborsystem langsames α -Teilchen resultieren und so können α -Teilchen kleiner Energie auftreten. Hierzu ist nicht einmal Spaltung des Kerns in schwere und leichte Splitter nötig, der Effekt wird ebenso auftreten z. B. bei Spaltung in zwei gleich große Teile, die beide regulär verdampfen. Auch hier werden die Protonen durch ihre an sich schon größeren Geschwindigkeiten den Effekt der Bewegung des Verdampfungs-zentrums leichter überdecken als α -Teilchen.

Der zweiten Erklärung scheint der Vorrang zu gebühren. Gegen die erste läßt sich nämlich einwenden, daß der genannte Mechanismus ebenfalls den Protonen

zugute kommen müßte: Das Maximum von $\frac{\gamma_{\text{He}^4}}{\gamma_P}$ liegt bei $\bar{T} = \left[\frac{(P_{\text{He}^4} - P_P)}{(Q_{\text{He}^4} - Q_P)} \right]^{\frac{1}{2}}$ = 2,8 MeV und würde sich bei Temperaturabhängigkeit des Potentials V' sogar noch nach unten verschieben. An den übererhitzten Stellen wäre also $\gamma_{\text{He}^4}/\gamma_P$ schon wieder sehr klein und der Effekt sollte sich an Protonen noch viel stärker als an α -Teilchen zeigen. Außerdem müßten die Protonen dann ebenfalls eine Bündelung zeigen. Schließlich verlangten die beobachteten kleinen Energien der α -Teilchen Potentialerniedrigungen (V'), die sich mit den heutigen Vorstellungen über Kerndeformationen nicht vereinbaren lassen.

Wenn auch die zweite Erklärung plausibler scheint, darf man nicht übersehen, daß eine genaue Beschreibung noch aussteht und vermutlich auch schwierig sein wird. Es wäre sogar möglich, daß keine der hier beschriebenen Erklärungen quantitativ genügend große Effekte liefert.