CALCUL DES OBSERVATIONS DE GRANDES GERBES

Par J. DAUDIN.

Laboratoire de l'École Normale supérieure.

Sommaire. — De nouvelles expériences avec de nouveaux appareils à compteurs ont été poursuivies par MM. Maze et Fréon sur la suggestion du Professeur P. Auger. Ces expériences ont amené l'auteur à étendre à de nouveaux montages les calculs dérivés de la loi de fréquence et déjà publiés dans un précédent article de ce journal (réf. Auger et Daudin). En même temps la marche des calculs est présentée de façon plus générale ainsi que les résultats et plusieurs applications nouvelles, satisfaisantes, en sont données.

1. **Introduction**. — Diverses expériences (*cf.* Daudin et Loverdo) ont permis d'établir que la fréquence des gerbes d'Auger tombant sur une surface d'observation déterminée avec une densité moyenne de trajectoires comprise entre δ et $\delta + d\delta$, est de la forme

$$N(\delta)\, d\delta = N_0\, \delta^{-1-\gamma}\, d\delta, \qquad (1)$$

où γ est l'indice intégral, variable avec l'altitude et peut être avec d'autres facteurs, N_0 un paramètre variable avec l'altitude et l'amplitude des gerbes.

Si les trajectoires sont indépendantes, ce qui est à peu près vrai pourvu que les distances mutuelles des compteurs soient du même ordre de grandeur et qu'aucun écran gerbigène ne fausse la répartition au hasard, la probabilité pour qu'un compteur de surface S soit touché est, d'après Poisson

$$1 - e^{-s\delta}.$$

La fréquence avec laquelle p compteurs de surface s_1, s_i, s_p seraient touchés par l'ensemble des gerbes de densité comprise entre zéro et l'infini est

$$P_p = N_0 \int_0^\infty \delta^{-1-\gamma} \prod_{i=1}^{i=p} (1 - e^{-s_i\delta})\, d\delta.$$

S'il y a q compteurs en anticoïncidence de surface s'_1, s'_j, s'_q, il faut multiplier sous l'intégrale par

$$\prod_{=1}^{j=q} e^{-s'_j\delta} = e^{-\Sigma s'_j\delta}.$$

Posons $\Sigma s'_j = \sigma$, surface totale des compteurs en anticoïncidence

$$P_{p-q} = N_0 \int_0^\infty \delta^{-1-\gamma} \prod_{i=1}^{i=p} (1 - e^{-s_i\delta})\, e^{-\sigma\delta}\, d\delta. \qquad (2)$$

Telle est la fréquence avec laquelle un système de p compteurs s_i sera touché par des gerbes qui n'actionnent pas q autres compteurs de surface totale σ.

2. **Observations préliminaires.** — Cette formule n'est valable que dans les conditions énumérées ci-dessus : envergure totale du système de compteurs déterminée, distance entre les compteurs du même ordre de grandeur, altitude déterminée, pas de toit notable.

En outre la formule (1) *nous indique que le nombre total de gerbes devrait être infini comme l'intégrale. Ce résultat étant absurde, γ ne saurait être constant et doit devenir plus petit que zéro vers les très faibles densités. Mais la figure* 1 *de l'article d'Auger et Daudin montre que les coïncidences n'intéressent qu'une bande étroite de densités allant de* 1000 *à* 1 *ou de* 100 *à* 1 *ou même moins. Il suffit que γ varie peu dans un tel intervalle.*

Serrons de plus près les limites dans lesquelles (2) a un sens. Pour que l'intégrale soit finie pour la limite supérieure $\delta \to \infty$, il suffit que $\sigma \neq 0$ ou si $\sigma = 0$ que $\gamma > 0$.

Pour que l'intégrale soit finie pour la limite inférieure $\delta \to 0$, comme $1 - e^{-s_i\delta} \to s_i\delta$, le produit tend vers $\Pi s_i \delta^p$, l'intégrale tend vers

$$\int \delta^{-1-\gamma}\, \delta^p\, \Pi s_i\, \mathrm{d}\delta.$$

Ceci a un sens pourvu que $p - 1 - \gamma > -1$ ou encore $p > \gamma$. Donc, deux conditions

$$\text{I. } \sigma \neq 0, \quad \text{ou} \quad \sigma = 0, \quad \gamma > 0; \qquad \text{II. } p > \gamma.$$

Dans les expériences γ est compris entre 1 *et* 2 *voisin de* 1,5 : *l'intégrale a donc un sens pourvu qu'on enregistre des coïncidences au moins doubles. Dans des conditions où γ serait supérieur à* 2, *les gerbes ne seraient enregistrables qu'en coïncidences au moins triples. C'est ce qui se produit probablement aux fortes densités.*

3. **Intégration.** — Le principe nous en a été indiqué par le Dr E. Schatzmann de l'Institut d'Astrophysique.

Il suffit d'intégrer deux fois par parties pour $1 < \gamma < 2$

$$P_{p-q} = N_0 \left[-\frac{\delta^{-\gamma}}{\gamma} \Pi_0\, e^{-\sigma\delta} \right] + N_0 \left[\frac{\delta^{1-\gamma}}{\gamma(\gamma-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta} (\Pi_0\, e^{-\sigma\delta}) \right] + \frac{N_0}{\gamma(\gamma-1)} \int \delta^{1-\gamma} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\delta^2} (\Pi_0\, e^{-\sigma\delta})\, \mathrm{d}\delta.$$

Les deux premiers crochets sont nuls aux deux limites si les conditions I et II sont remplies. Examinons l'intégrale restante. Développons le produit Π et multiplions par $e^{-\sigma\delta}$, on aura un polynome d'exponentielles dont chaque terme sera de la forme $A_l . e^{-(s_l+\sigma)\delta}$, *où s_l est une somme d'un certain nombre de surfaces s_i et A_l le coefficient de l'exponentielle d'exposant $s_l + \sigma$.*

La dérivée seconde de chaque terme est

$$A_l (s_l + \sigma)^2\, e^{-(s_l+\sigma)\delta},$$

$$P_{p-q} = \frac{N_0}{\gamma(\gamma-1)} \Sigma A_l (s_l+\sigma)^2 \int_0^\infty \delta^{1-\gamma}\, e^{-(s_l+\sigma)\delta}\, \mathrm{d}\delta,$$

$$= \frac{N_0}{\gamma(\gamma-1)} \Sigma A_l (s_l+\sigma)^\gamma \times \int_0^\infty \big((s_l+\sigma)\delta\big)^{1-\gamma} e^{-(s_l+\sigma)\delta}\, \mathrm{d}(s_l+\sigma)\delta.$$

Si $\gamma < 2$ l'intégrale a un sens, c'est factorielle $1 - \gamma$

$$P_{p-q} = N_0 \frac{(1-\gamma)!}{\gamma(\gamma-1)} \Sigma A_l (s_l+\sigma)^\gamma. \tag{3}$$

Exemples d'application. — *a.* Soit à calculer les coïncidences doubles entre deux compteurs de surface s et S sans anticoïncidences $\sigma = 0$. Le produit Π est

$$(1 - e^{-s\delta})(1 - e^{-S\delta}) = 1 - e^{-s\delta} - e^{-S\delta} + e^{-(s+S)\delta}.$$

Les exposants s_l sont s, S et $S + s$, les coefficients A_l sont -1, -1 et $+1$

$$P_2 = N_0 \frac{(1-\gamma)!}{\gamma(\gamma-1)} \big(-s^\gamma - S^\gamma + (s+S)^\gamma \big). \tag{4}$$

b. Soit à calculer les coïncidences $p^{\text{ièmes}}$ entre p compteurs identiques s; q compteurs identiques étant en anticoïncidences $\sigma = q.s$; s_l est $i.s$ (i allant de l à p) — A_l est $(-1)^i . C_p^i$

$$P_{p-q} = N_0 \frac{(1-\gamma)!}{\gamma(\gamma-1)} s^\gamma \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^i C_p^i (q+i)^\gamma. \tag{5}$$

4. **Premières conséquences.** — *Si les surfaces de tous les compteurs sont multipliées par un facteur commun λ, chaque terme $(s_l + \sigma)$ est multiplié par λ et le nombre des coïncidences par λ^γ.* Résultat connu.

Si en coïncidences doubles, les surfaces des deux compteurs sont très différentes, par exemple si $s \ll S$, on peut remplacer

$$(s+S)^\gamma = S^\gamma \left(1 + \frac{s}{S}\right)^\gamma = S^\gamma \left(1 + \frac{\gamma s}{S} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \frac{s^2}{S^2} + \ldots\right).$$

Au premier ordre près, le nombre des coïncidences P_2 varie comme

$$P_2 \sim N_0 \frac{(1-\gamma)!}{\gamma(\gamma-1)} s \gamma S^{\gamma-1}. \tag{4'}$$

Si l'un des compteurs est très grand, le nombre des coïncidences doubles varie comme la surface du grand compteur à la puissance $(\gamma - 1)$, *environ comme la racine carrée de la surface.*

Par exemple, le dispositif des gerbes de mésons de Janossy est actionné par une particule gerbigène très rare, il est équivalent à un compteur unique de *très petite surface et le nombre des gerbes de mésons associées à la coïncidence d'un compteur éloigné variera comme la racine carrée de la surface de ce compteur* (¹).

5. Nombre de trajectoires sur une surface déterminée. — Le nombre de trajectoires qui traversent une chambre de Wilson commandée par un système de compteurs, est une grandeur intéressante.

a. Nombre moyen. — Pour une gerbe de densité δ, le nombre moyen de trajectoires sur la surface S est $S\delta$.

Pour l'ensemble des gerbes, c'est la valeur moyenne de $S\delta$.

$$\overline{N_{p-q}} = \frac{S}{P_{p-q}} \int \delta^{-\gamma} \Pi_{()} \, e^{-\sigma\delta} \, d\delta.$$

Cette intégrale n'a de sens que si dans la condition I, on remplace $\gamma > 0$ par $\gamma > 1$. Pour intégrer le numérateur, il suffit d'une seule intégration par parties et donc d'une dérivation. On remplacera donc γ par $\gamma - 1$

$$\overline{N_{p-q}} = S\gamma \frac{\Sigma A_l (s_l + \sigma)^{\gamma-1}}{\Sigma A_l (s_l + \sigma)^{\gamma}}. \tag{6}$$

b. Fréquence du passage de ν trajectoires sur la surface S. — Pour la gerbe de densité δ, cette fréquence est donnée par la formule de Poisson

$$\frac{e^{-S\delta}(S\delta)^{\nu}}{\nu!}.$$

C'est la valeur moyenne de cette probabilité qui donne la fréquence de passage de ν trajectoires pour toutes les gerbes

$$P^{\nu}_{p-q} = \frac{S^{\nu}}{\nu!} \frac{1}{P_{p-q}} \int_0^{\infty} \delta^{\nu} e^{-S\delta} \delta^{1-\gamma} \Pi_{()} \, e^{-\sigma\delta} \, d\delta.$$

Il faut évidemment remplacer σ par $S + \sigma$ et γ par $\gamma - \nu$ moyennant quoi, on trouvera aisément si $\nu > 1$

$$P^{\nu}_{p-q} = \frac{S^{\nu}}{\nu!} \left[\frac{\gamma(\gamma-1)}{(1-\gamma)!} (\nu - \gamma - 1)! \right] \frac{\Sigma A_l (s_l + S + \sigma)^{\gamma-\nu}}{\Sigma A_l (s_l + \sigma)^{\gamma}}.$$

On peut remplacer le facteur entre crochets par $\prod_{i=0}^{i=\nu-1} (i - \gamma)$, formule valable aussi pour $\nu = 0$ et $\nu = 1$.

Ce sont, sous une autre forme, les résultats indiqués au paragraphe 13, formules (8) et (9) par Auger et Daudin, sauf erreur d'impression (dans k^{ν} remplacer S^{γ} par S^{ν}).

(¹) Note sur épreuve : l'auteur remercie M. Janossy qui lui a communiqué la copie d'un article aux *Procedings of the Royal Society*, avant sa parution. Dans ce travail des calculs analogues sont développés mais en vue d'applications généralement différentes.

6. Coïncidences en combinaison. — Pour accroître la souplesse des systèmes de compteurs, on est de plus en plus amené à enregistrer des coïncidences d'ordre inférieur au nombre de compteurs utilisés, en signalant quels sont les compteurs touchés à chaque coïncidence (Regener, Rogozinsky et Auger, etc.), par exemple, par des lampes néon.

Par exemple, à l'École Normale supérieure-Maze et Fréon ont construit un appareil qui enregistre toutes les coïncidences au moins triples entre neuf compteurs et permet de lire le nombre et la position des compteurs touchés.

Ceci pose un nouvel objet au calcul : calculer les coïncidences au moins $p^{\text{ièmes}}$ entre r compteurs identiques de surface s.

On ne saurait partir du nombre de coïncidences $p^{\text{ièmes}}$ entre p compteurs et multiplier par le nombre de combinaisons de r compteurs p à p car les coïncidences touchant plus de p compteurs intéressent plusieurs combinaisons de p compteurs : pour additionner des probabilités, il faut que les cas s'excluent les uns les autres.

En revanche, les coïncidences $p^{\text{ièmes}}$ ne touchant aucun autre compteur (anticoïncidences des $r - p$ autres compteurs) s'excluent les unes les autres et s'ajoutant toutes, donnent le nombre de coïncidences d'ordre p entre les r compteurs, ce qu'on écrira

$$\mathcal{N}^p_r = C^p_r P_{p-q} \quad \text{où} \quad r - p = q.$$

On pourra de même calculer les coïncidences d'ordre $p + 1, \ldots$, jusqu'à r et en ajoutant connaître le nombre total de coïncidences d'ordre égal ou supérieur à p (par exemple, les coïncidences entre trois compteurs au moins), ce qu'on écrira

$$\mathcal{N}^{\geqslant p}_r = \mathcal{N}^p_r + \mathcal{N}^{p+1}_r + \ldots + \mathcal{N}^j_r + \ldots + \mathcal{N}^r_r.$$

D'après (5) le nombre $\mathcal{N}^p_r$ de coïncidences $p^{\text{ièmes}}$ prises entre r compteurs

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{N}^p_r &= ks^{\gamma} C^p_r \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^i C^i_p (r - p + i)^{\gamma}, \\ \text{où} \quad k &= N_0 \frac{(1-\gamma)!}{\gamma(\gamma-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

On peut par un calcul assez complexe, trouver une formule générale relativement simple pour les coïncidences d'ordre égal ou supérieur à p

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{\geqslant p}_r &= \mathcal{N}^p_r + \ldots + \mathcal{N}^j_r + \ldots + \mathcal{N}^r_r \\ &= ks^{\gamma} \sum_{j=p}^{j=r} C^j_r \sum_{i=1}^{i=j} (-1)^i C^i_j (r - j + i)^{\gamma}. \end{aligned}$$

Donnons seulement le résultat

$$\mathcal{N}^{\geqslant p}_r = ks^{\gamma} p \, C^p_r \sum_{u=1}^{u=p} (-1)^u C^{u-1}_{p-1} (r - p + u)^{\gamma-1}. \tag{9}$$

L'on peut, enfin, calculer la fréquence relative avec laquelle un compteur déterminé est touché dans un tel montage actionné par les coïncidences $p^{\text{ièmes}}$ entre r compteurs. La fréquence avec laquelle un compteur déterminé parmi les r, *n'est pas touché* est

$$Q_{r-1}^{\geqq p} = ks\gamma\left[1 + pC_{r-1}^{p}\sum_{u=1}^{u=p}(-1)^{u}C_{p-1}^{u-1}\frac{(r-p+u)\gamma}{r-1-p+u}\right].$$

7. **Applications numériques**. — Appliquons les formules indiquées à des compteurs identiques.

Coïncidences doubles entre 2 compteurs [formule (5) $q = 0$ ou (8) $r = p = 2$]

$$P_2 = ks\gamma(2\gamma - 2).$$

Coïncidences triples entre 3 compteurs [formule (5) $p = 3$, $q = 0$ ou (8) $r = p = 3$]

$$P_3 = ks\gamma(3\gamma - 3.2\gamma + 3).$$

Coïncidences quadruples entre 4 compteurs [formule (5) $p = 4$, $q = 0$ ou (8) $r = p = 4$]

$$P_4 = ks\gamma(4\gamma - 4.3\gamma + 6.2\gamma - 4).$$

Coïncidences au moins triples entre 9 compteurs [formule (8) $r = 9$, $p = 3$]

$$\mathcal{N}_9^{\geqq 3} = ks\gamma\, 252(-9\gamma^{-1} + 2.8\gamma^{-1} - 7\gamma^{-1}).$$

Voici un tableau numérique pour différentes valeurs de γ :

Rapports exprimés en pourcentage	γ 1,65	γ 1,5	γ 1,33	Observation niveau de la mer
Rapport $\frac{\text{Triples}}{\text{Doubles}}$	25,3	35	44,9	~ 25
» $\frac{\text{Quadruples}}{\text{Triples}}$	58,9	64,2	69,5	~ 60
Accroissement du nombre de coïncidences triples lorsqu'on utilise 9 compteurs au lieu de 3	12,05	9,7	7,55	11,6 + 1,7
Expériences avec 9 compteurs $\frac{\text{Quadruples}}{\text{Triples}}$	39,8	44,8	50,3	$\frac{113}{283} = 40$
Expériences avec 9 compteurs $\frac{\text{Quintuples}}{\text{Quadruples}}$	51,3	54,9	59,6	$\frac{59}{113} = 52$
Expériences avec 9 compteurs $\frac{\text{Sextuples}}{\text{Quadruples}}$	28,6	33	38	$\frac{31}{113} = 28$
Expériences avec 9 compteurs $\frac{\text{Septuples}}{\text{Quadruples}}$	17,2	20,5	25	$\frac{11}{113} = 10$
Expériences avec 9 compteurs $\frac{\text{Octuples}}{\text{Quadruples}}$	9,8	12,45	16,1	$\frac{5}{113} = 5$
Expériences avec 9 compteurs $\frac{\text{Nonuples}}{\text{Quadruples}}$	5	6,7	9,27	$\frac{2}{113} = 2$

N.-B. — Il s'agit partout dans ce tableau de coïncidences au moins doubles, au moins triples, etc.

Enfin, la fréquence relative avec laquelle un compteur est touché est :

42,5 pour 100, 44,6 pour 100, 47,2 pour 100 contre 40 pour 100 observé.

On voit qu'au niveau de la mer, pour des envergures de quelques mètres, l'indice γ est très vraisemblablement voisin de 1,65.

En altitude γ doit diminuer (confirmé par le travail de Maze et Fréon) : donc, l'accroissement des coïncidences dépend légèrement du montage, les coïncidences doubles augmentant moins vite que les triples, les coïncidences entre gros compteurs augmentant moins vite que les coïncidences entre petits compteurs. Le calcul montre que les coïncidences au moins triples entre neuf compteurs enregistrées par l'appareil Maze-Fréon doivent croître à peu près comme les doubles dont la croissance a été observée par le groupe d'Auger. En combinant avec les résultats de Hilberry, on prévoit que les coïncidences observées par Fréon et Maze doivent être multipliées environ par 10 à 3000 m et par 35 vers 5300 m, soit 10 : h au niveau de la mer, 100 : h à 3000 et 350 : h vers 5300 m.

On voit quel intérêt présentent ces calculs pour la prévision des expériences de grande gerbe.

8. **Sensibilité de divers montages à l'efficacité**

d'un ou plusieurs compteurs. — On sait (*voir* Daudin, *Ann. de Phys.*, 1945, 20, p. 563) que l'on peut représenter l'absorption des rayons de gerbe par un écran, comme une simple diminution de l'efficacité, c'est-à-dire de la surface du compteur protégé. De même, au moins qualitativement, si l'on rapproche deux compteurs on augmente le nombre des coïncidences et l'efficacité des compteurs ou, si l'on veut, leur surface efficace (effet de corrélation dans l'espace).

L'effet de ces variations de surface est très différent suivant le montage des compteurs. Supposons pour simplifier que deux compteurs de surface s subissent une petite variation identique de surface égale à Δs. Plaçons-les d'abord en coïncidences doubles. Il est évident d'après le paragraphe 7 que la variation relative des coïncidences sera

$$\frac{\Delta P_2}{P_2} = \gamma \frac{\Delta s}{s}.$$

Associons un troisième compteur de même surface s mais fixe. Un calcul élémentaire montre que la même variation Δs des deux premiers compteurs entraînera une variation des triples

$$\frac{\Delta T}{T} = 2\gamma s \frac{\Delta s}{s} \frac{-1 + 2.2^{\gamma-1} - 3^{\gamma-1}}{-3 + 3.2^{\gamma} - 3^{\gamma}} \# \frac{\Delta s}{s} \quad \text{si} \quad \gamma = 1,5.$$

Associons maintenant à ces trois compteurs un quatrième de grande surface S en *anticoïncidence*. Un calcul d'approximation montre que le nombre de ces triples non quadruples est de la forme $A.s^2.s.S^{\gamma-3}$ et que la variation relative est donc $2\frac{\Delta s}{s}$ (deux des trois petits compteurs seuls varient).

Les trois montages conduisent donc à des variations relatives allant du simple au double. En général on peut dire que les petits effets sont noyés dans les montages exigeant de fortes densités parce que les gerbes très denses saturent les compteurs. Ils sont au contraire exagérés si l'on exclut les gerbes denses par quelque système d'anticoïncidence. Ceci est le développement de l'observation originale de Maze; lorsque parmi les neuf compteurs on en considère deux de plus en plus écartés, la décohérence est très accentuée sur les coïncidences triples non quadruples (anticoïncidences des six autres compteurs). D'après ce qui précède l'effet de la décohérence doit même être supérieur à celui qu'on obtiendrait en observant les coïncidences doubles entre deux compteurs de plus en plus écartés comme l'ont fait autrefois Auger, Maze et Robley.

Dernière observation : Autrefois Auger et Daudin essayèrent de déceler les condensations locales en coïncidences triples en rapprochant deux compteurs sur trois, ils pensaient faire de ce système rapproché un sélecteur de condensations locales. La chambre de Wilson montra par la suite qu'il n'en était rien. Ce qui précède en fournit l'explication : loin d'accentuer l'effet des condensations locales, ce montage les défavorisait en les noyant dans les gerbes de grande densité. Il aurait fallu ajouter un quatrième compteur, de grande surface, en anticoïncidence [2].

[2] Note : a plus forte raison les essais tentés en coïncidences quadruples pour étudier la décohérence en écartant deux compteurs sont-ils peu adaptés. Ceci explique peut être l'échec d'une récente expérience de Cocconi.

Manuscrit reçu le 20 octobre 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

JANOSSY, *Communication au Congrès de Cracovie.*
COCCONI, LOVERDO et TONGIORGI, *Phys. Rev.*, 1946, **70**, 841 et suivantes.
DAUDIN et LOVERDO, *Journ. de Phys. Rad.*, 1947, **8**, 233.
AUGER, EHRENFEST, MAZE, et FRÉON, *J. de Phys. et Rad.*, 1939, p. 39.
AUGER et DAUDIN, *J. de Phys. Rad.*, 1945, **6**, 302.
DAUDIN, *Ann. de Physique*, 1945, **20**, 563.